ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA NAZIONALE

DEI LINCEI

ANNO CCCXVIII.

1921

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXX.

1° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1921

Matematica. — *Sulla teoria degl'integrali semplici di 1ª specie appartenenti ad una superficie algebrica.* Nota II del Corrispondente Francesco Severi.

3. Sieno ora

$$\psi_{q+1} = 0 \,, \ldots , \psi_p = 0 \,, \tag{7}$$

$p - q$ aggiunte ad F, d'ordine $m - 3$, che stacchino curve indipendenti sopra un generico piano $y =$ cost. per guisa che il sistema lineare

$$\lambda_{q+1} \psi_{q+1} + \cdots + \lambda_p \psi_p = 0 \tag{8}$$

ha la dimensione $p - q - 1$.

Non si potrà però esigere, come per le aggiunte d'ordine $m - 2$ del sistema (6) sopra costruito, che le (7) stacchino $p - q$ curve indipendenti sopra *ogni* piano $y =$ cost.; chè anzi, se $p_g > 0$, esisterà sempre un numero finito di piani $y =$ cost., su cui le curve suddette saranno linearmente dipendenti. Invero entro il sistema lineare V', di dimensione $p + p_a - 1$, delle aggiunte d'ordine $m - 3$, la varietà W' delle superficie spezzate in un'aggiunta d'ordine $m - 4$ ed in qualche piano $y =$ cost., è di dimensione p_g, e quindi W' ha in comune un numero finito di elementi con un sistema lineare generico, di dimensione $(p + p_a - 1) - p_g = p - q - 1$, appartenente a V'. *I valori di y per cui accade che le curve* (7) *divengano linearmente dipendenti, si diranno i valori critici di y* (per la stretta analogia che hanno con quelli considerati da Poincaré).

Il valore $y = \infty$, nei riguardi di questo concetto, si tratta come ogni altro valore finito di y, perchè la proprietà che definisce i valori critici ha carattere proiettivo [1].

Se $p_g = 0$ non esiste alcun valore critico pel sistema (8), perchè se in un piano $y = y_0$ le (7) dessero curve dipendenti, esisterebbe una superficie di (8) contenente quel piano.

[1] Non è difficile provare che si possono scegliere le (7) in guisa che vi sia un solo valor critico prefissato, p. es. $y = y_0$ (occorre all'uopo considerare le aggiunte ad F d'ordine minimo $m - \mu - 3$ e formare con esse altrettante aggiunte linearmente indipendenti d'ordine $m - 3$, aggregando il piano $y - y_0 = 0$ contato μ volte; poi considerare il massimo numero di aggiunte linearmente indipendenti d'ordine $m - \mu - 2$ tali che il loro sistema lineare non contenga alcuna aggiunta spezzata in un piano $y =$ cost. e in un'aggiunta d'ordine $m - \mu - 3$, e formare con esse altrettante aggiunte d'ordine $m - 3$, aggregando il piano $y - y_0 = 0$ contato $\mu - 1$ volte; ecc.). Naturalmente il valore $y = y_0$ sarà allora un valore critico multiplo, d'ordine di molteplicità eguale all'ordine delle varietà W' (che è assimilabile ad un luogo di ∞^1 spazî lineari di dimensione $p_g - 1$).

Osserviamo infine che il sistema (8) può esser sempre scelto in guisa da evitare che uno o più *prefissati* valori di $y (y = \alpha\ ,\ y = \beta\ ,\ldots$ ed eventualmente $y = \infty)$, in numero finito, siano critici. Basta all'uopo scegliere entro V′ il sistema (8) in modo che non incontri i sistemi lineari $\infty^{p_g - 1}$ delle superficie spezzate nei piani $y = \alpha$ o $y = \beta\ ,\ldots$ e in aggiunte d'ordine $m - 4$. Riassumendo:

Scelte $p - q$ aggiunte d'ordine $m - 3$ ad F

$$\psi_{q+1} = 0\ ,\ldots,\ \psi_p = 0\ , \tag{7}$$

le quali seghino $p - q$ curve indipendenti sopra un piano generico passante per la retta r, se $p_g > 0$, c'è un numero finito di piani eccezionali del fascio r su cui le (7) dànno curve linearmente dipendenti; e si può sempre sceglier le (7) in modo da evitare che uno o più prefissati piani del fascio, in numero finito, siano eccezionali.

4. Consideriamo ora il sistema lineare, che indicheremo con L:

$$\lambda_1 \varphi_1 + \cdots + \lambda_q \varphi_q + (\lambda_{q+1} \psi_{q+1} + \cdots + \lambda_p \psi_p)(y - y_0) = 0 \tag{9}$$

di aggiunte d'ordine $m - 2$, il qual sistema riducesi a:

$$\lambda_1 \varphi_1 + \cdots + \lambda_q \varphi_q + (\lambda_{q+1} \psi_{q+1} + \cdots + \lambda_p \psi_p) = 0\ , \tag{9'}$$

quando sia $y_0 = \infty$.

Dico che il sistema L ha la dimensione $p - 1$. Infatti la (9) — o la (9′) — non può ridursi a un'identità in $x\ ,y\ ,z$ per valori tutti nulli delle $\lambda_1\ ,\ldots,\ \lambda_q$, senza che sieno contemporaneamente nulle tutte le $\lambda_{q+1}\ ,\ldots,\ \lambda_p$; e viceversa. Nè d'altronde può darsi che sia diversa da zero qualcuna delle λ del 1° gruppo e qualcuna delle λ del 2° gruppo, perchè allora vi sarebbe qualche superficie del sistema (6), contenente come parte il piano $y = y_0$.

Denotiamo con π il sistema lineare:

$$\lambda_1 \varphi_1 + \cdots + \lambda_q \varphi_q = 0 \tag{6}$$

e con K il sistema lineare:

$$(y - y_0)(\lambda_{q+1} \psi_{q+1} + \cdots + \lambda_p \psi_p) = 0\ , \tag{10}$$

che riducesi alle superficie del sistema (8), cui si aggreghi il piano improprio, quando $y_0 = \infty$.

E chiamiamo, come prima, *valori critici di y rispetto al sistema* L, quelli per cui le curve (9) risultano linearmente dipendenti.

È chiaro che tutti i valori critici del sistema lineare (8) sono critici pel sistema lineare L; e che inoltre L possiede come valore critico $y = y_0$ ($o\ y = \infty$, se $y_0 = \infty$), perchè sul piano $y = y_0$ le curve di L riduconsi soltanto a q indipendenti.

Orbene, dico che L non possiede altri valori critici, oltre ai nominati. Infatti, se esistesse un valor critico $y=\alpha$, diverso dai precedenti, si avrebbe per convenienti valori $\lambda_1^{(0)}, \ldots, \lambda_p^{(0)}$ non tutti nulli dalle λ, l'identità rispetto ad x, z:

$$\lambda_1^{(0)}\varphi_1(x,\alpha,z)+\cdots+\lambda_q^{(0)}\varphi_q(x,\alpha,z)+ \\ +(\alpha-y_0)(\lambda_{q+1}^{(0)}\psi_{q+1}(x,\alpha,z)+\ldots)\equiv 0,$$

donde si trae:

$$\lambda_1^{(0)}\varphi_1(x,y,z)+\cdots+(y-y_0)(\lambda_{q+1}^{(0)}\psi_{q+1}(x,y,z)+\cdots)\equiv(y-\alpha)\psi(x,y,z),$$

$\psi=0$ essendo un'aggiunta d'ordine $m-3$.

Ora le $\lambda_1^{(0)}, \ldots, \lambda_q^{(0)}$ non potrebbero essere tutte nulle, perchè altrimenti si cadrebbe in uno dei valori critici già nominati; dunque la superficie $\lambda_1^{(0)}\varphi_1(x,y,z)+\cdots+\lambda_q^{(0)}\varphi_q(x,y,z)=0$ del sistema π dovrebbe segare su ogni piano $y=$ cost., fuori della retta r, una curva appartenente a qualche superficie aggiunta d'ordine $m-3$: il che contraddice al modo con cui fu scelto π. Posto:

$$\varphi_{q+1}\equiv(y-y_0)\psi_{q+1}, \ldots, \varphi_p\equiv(y-y_0)\psi_p, \tag{11}$$

si può enunciare che:

Il sistema lineare L *di equazione*:

$$\lambda_1\varphi_1+\cdots+\lambda_q\varphi_q+\lambda_{q+1}\varphi_{q+1}+\cdots+\lambda_p\varphi_p=0,$$

non possiede altri valori critici, all'infuori di quelli che sono critici pel sistema:

$$\lambda_{q+1}\varphi_{q+1}+\cdots+\lambda_p\varphi_p=0.$$

Giacchè appunto i valori critici di questo sistema K sono quelli critici pel sistema (8), coll'aggiunta del valore critico $y=y_0$. Se $p_g=0$, l'unico valor critico di L è $y=y_0$ (o $y=\infty$, se $y_0=\infty$).

5. Dalle proposizioni dimostrate nei nn. 3, 4, si deduce che se $y=\alpha$ è un valor critico di L, si possono sostituire alle $\varphi_{q+1}, \ldots \varphi_p$, altre $p-q$ aggiunte d'ordine $m-2$, linearmente indipendenti, $\varphi'_{q+1}, \ldots, \varphi'_p$, in guisa che pel nuovo sistema L':

$$\lambda_1\varphi_1+\cdots+\lambda_q\varphi_q+\lambda_{q+1}\varphi'_{q+1}+\cdots+\lambda_p\varphi'_p=0$$

il valore $y=\alpha$ non sia più critico od anche che non siano critici certi valori prefissati $y=\alpha$, $y=\beta, \ldots$ (ivi compreso eventualmente $y=\infty$). Se $\alpha=y_0$ si ottiene senz'altro l'intento aggregando alle $\psi_{q+1}, \ldots, \psi_p$ il piano fisso $y-y_1=0$ ($y_1\neq y_0$) invece del piano $y-y_0=0$.

Si avrà allora $\varphi'_{q+1}=(y-y_1)\psi_{q+1}, \ldots, \psi'_p=(y-y_1)\psi_p$, cioè:

$$\varphi'_{q+1}=\frac{y-y_1}{y-y_0}\varphi_{q+1}, \ldots, \varphi'_p=\frac{y-y_1}{y-y_0}\varphi_p. \tag{12}$$

Il determinante di questa sostituzione lineare, che fa passare dalle φ alle φ', riducesi a $\left(\frac{y-y_1}{y-y_0}\right)^{p-q}$. Esso annullasi pel valore $y=y_1$, che è critico rispetto alle φ', e diviene infinito pel valore $y=y_0$, che è critico rispetto alle φ.

Se $y=\alpha$, $y=\beta,\ldots$ sono valori diversi da y_0, critici per L, cioè pel sistema (8), in forza del n. 3, si potranno sostituire alle $\psi_{q+1},\ldots,\psi_p$ altre $p-q$ aggiunte d'ordine $m-3$, linearmente indipendenti, $\psi'_{q+1},\ldots,\psi'_p$, in guisa che $y=\alpha$, $y=\beta,\ldots$ non siano critici. Allora posto:

$$\varphi'_{q+1}=(y-y_0)\psi'_{q+1},\ldots,\varphi'_p=(y-y_0)\psi'_p, \tag{13}$$

il nuovo sistema L' non avrà più i valori critici $y=\alpha$, $y=\beta,\ldots$

Qual'è il legame fra le φ' e le φ, cioè fra le ψ' e le ψ? La curva staccata dalla ψ'_{q+i} sopra un generico piano $y=\text{cost.}$ si esprime linearmente mediante le sole $\psi_{q+1},\ldots,\psi_p$, appunto perchè le aggiunte d'ordine $m-3$ staccano su quel piano un sistema ∞^{p-q-1}. I coefficienti di tale combinazione lineare sono univocamente determinati, perchè altrimenti per y generico si avrebbe fra le $\psi_{q+1},\ldots,\psi_p$ un legame lineare. Dunque i coefficienti di quella combinazione lineare sono funzioni razionali di y. Fra le ψ' e le ψ si avrà pertanto una sostituzione lineare del tipo:

$$\psi'_{q+i}=\sum_{j=1}^{p-q} a_{ij}\,\psi_{q+j} \qquad (i=1,\ldots,p-q), \tag{14}$$

le a_{ij} essendo funzioni razionali di y. Se $y=\eta$ è un valore per cui il determinante $|a_{ij}|$ delle a si annulla, fra le $p-q$ forme lineari (14), ove in esse si ponga $y=\eta$, risulterà un legame lineare a coefficienti costanti non tutti nulli. Il che significa che η è un valor critico del sistema delle ψ'. Viceversa, se η è critico per le ψ', sussisterà, per valori non tutti nulli delle $\lambda^{(0)}$, un'identità, rispetto ad x, z, del tipo:

$$\sum_{i=1}^{p-q}\lambda^{(0)}_{q+i}\sum_{j=1}^{p-q}\bar{a}_{ij}\,\overline{\psi}_{q+j}\equiv 0,$$

(ove $\bar{a}_{ij}$, $\overline{\psi}_{q+j}$ sono i valori di a_{ij}, ψ_{q+j} per $y=\eta$), cioè:

$$\sum_j\overline{\psi}_{q+j}\sum_i\bar{a}_{ij}\lambda^{(0)}_{q+i}\equiv 0, \tag{15}$$

donde si trae che o sussistono le relazioni $\sum_i\bar{a}_{ij}\lambda^{(0)}_{q+i}=0$ e allora il determinante delle $\bar{a}$ è nullo; oppure fra le $\overline{\psi}$ havvi il legame (15) a coefficienti costanti, non tutti nulli.

Dunque gli zeri della funzione razionale $|a_{ij}|$ cadono nei valori di y che son critici pel sistema delle ψ' senza contemporaneamente esser critici pel sistema delle ψ. Considerando poi la sostituzione lineare inversa della (14) si vede subito che $|a_{ij}|$ diviene infinito soltanto nei valori di y che son critici pel sistema delle ψ, senza esserlo pel sistema delle ψ'.

Questo risultato vale anche nel caso prima esaminato della sostituzione lineare (12) $\left(a_{ii} = \frac{y - y_1}{y - y_0}\right.$, $a_{ij} = 0$ per $i \neq j$), perchè in tal caso i soli valori critici, che non siano comuni alle ψ, ψ', sono appunto y_0, y_1.

Ricordando le (11), (13) la (14) si scrive:

$$\varphi'_{q+i} = \sum a_{ij} \varphi_{q+j}, \tag{16}$$

e si conclude che:

Se il sistema lineare L *possiede i valori critici* $y = \alpha$, $y = \beta, \ldots$ *si posson sempre cangiare le* $\varphi_{q+1}, \ldots, \varphi_p$, *sostituendole con altre* $p - q$ *aggiunte indipendenti d'ordine* $m - 2$, $\varphi'_{q+1}, \ldots, \varphi'_p$, *in guisa che quei valori non siano più critici pel nuovo sistema* L′:

$$\lambda_1 \varphi_1 + \cdots + \lambda_q \varphi_q + \lambda_{q+1} \varphi'_{q+1} + \cdots + \lambda_p \varphi'_p = 0 .$$

Le $\varphi'_{q+1}, \ldots, \varphi'_p$ *son legate alle* $\varphi_{q+1}, \ldots, \varphi_p$ *da una sostituzione lineare del tipo* (16), *ove le* a *son funzioni razionali di* y *e il determinante* $|a_{ij}|$ *delle* a *si annulla pei valori di* y *che son critici pel sistema* L′, *ma non per* L; *e diviene infinito pei valori che son critici per* L, *ma non per* L′. *In particolare* $|a_{ij}|$ *presenta singolarità polari in* $y = \alpha$, $y = \beta \ldots$

Osservazione 1ª. — Il determinante $|a_{ij}|$ si riduce ad una costante (non nulla) allora e solo allora che L, L′ hanno gli stessi valori critici.

Osservazione 2ª. — Ridotte le funzioni razionali a_{ij} allo stesso minimo determinatore comune, che sia il polinomio $a(y)$, le (16) potranno scriversi:

$$a(y)\, \varphi'_{q+1} = \sum b_{ij} \varphi_{q+j},$$

ove le b son polinomi in y. Si può ora supporre che il sistema L abbia il solo valore critico $y = \infty$, e ciò perchè si può assumere come equazione di L:

$$\lambda_1 \varphi_1 + \cdots + \lambda_q \varphi_p + \lambda_{q+1} \psi_{q+1} + \cdots + \lambda_p \psi_p = 0,$$

ove il sistema delle ψ abbia come solo valor critico $y = \infty$ (n. 3). Allora il determinante $\left|\frac{b_{ij}}{a(y)}\right| = \frac{1}{a^{p-q}} |b_{ij}|$, avrà il solo polo $y = \infty$ e quindi $a(y)$ dovrà ridursi ad una costante. Ne consegue che *si possono scegliere le* $\varphi_{q+1}, \ldots, \varphi_p$ *in tal guisa che per ogni scelta delle* $\varphi'_{q+1}, \ldots, \varphi'_p$ *i coefficienti della sostituzione* (16) *sieno polinomi in* y.