ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA NAZIONALE

DEI LINCEI

ANNO CCCXVIII.

1921

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXX.

1° Semestre.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1921

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA NAZIONALE

DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 17 aprile 1921.

F. D'Ovidio, Presidente.

MEMORIE E NOTE DI SOCI

Matematica. — *Le linee principali di una superficie di* S_5 *e una proprietà caratteristica della superficie di Veronese.* Nota II del Socio C. Segre.

5. Aggiungiamo che su una superficie non sviluppabile che verifichi un'equazione di Laplace, non solo non può svanire in ogni punto la coppia (7) delle tangenti alle caratteristiche (perchè A, B, C non possono essere tutte tre nulle identicamente); ma nemmeno può essere indeterminata la terna delle ulteriori tangenti principali. Invero questo fatto significherebbe che son nulle identicamente le 4 quantità (ξx^{pqr}), ove p, q, r valgono 1 o 2. La (39) di « *Sup* » (n. 20) ci darebbe: $(\xi^r x^{pq}) = 0$; e questa colle (36) e (37) proverebbe che tanto le ξ_i^1 quanto le ξ_i^2 soddisfano quelle stesse 6 equazioni lineari omogenee (1) e (8), che individuano i rapporti delle ξ_i. Ne seguirebbe, per ogni combinazione ik, $\xi_i^1 \xi_k - \xi_k^1 \xi_i = 0$, $\xi_i^2 \xi_k - \xi_k^2 \xi_i = 0$; e quindi i rapporti $\xi_i : \xi_k$ sarebbero costanti: la superficie starebbe in un iperpiano ξ fisso, contro l'ipotesi.

6. Vogliamo ora riconoscere, per una superficie *qualunque* F appartenente a S_5, quando avviene che in tutti i suoi punti le tangenti principali siano indeterminate.

In base al n. preced^e possiamo già escludere le superficie non sviluppabili soddisfacenti a un'equazione di Laplace. Di conseguenza (« *Sup.* » n. 5 e n. 13) per un punto generico x della F il cono quadrico V_4^2 (n. 1) sarà irriducibile. Ciò posto, ci conviene mutare il problema nel suo duale entro S_5 (cfr. « *Sup.* » n. 10, « *Prelim*[i] » n. 22). In luogo della superficie F, avremo una ∞^2 d'iperpiani; invece dei piani tangenti di F, il sistema Σ dei *piani caratteristici* di quella ∞^2 d'iperpiani. Al cono quadrico V_4^2 dianzi nominato risponderà la *conica focale* di un piano di Σ entro questo sistema ∞^2: tale conica nel caso attuale sarà dunque, per un piano generico, irriducibile. Quanto poi ai 5 iperpiani ξ del n. 1, essi si trasportano in 5 punti di quella conica focale, i quali, in base all'osservazione del n. 2, si potranno riguardare come intersezioni della conica stessa con coniche focali infinitamente vicine: dunque come *fochi di 2° ordine* per Σ (¹). Così il nostro problema si trasforma in questo: quando è che, non solo 5, ma tutti i punti di ogni conica focale di Σ sono fochi di 2° ordine.

Ora a tale questione risponde appunto il n. 4 della mia ultima Nota, ora citata, quando lo si applichi alla projezione su un S_4 del sistema di piani Σ. Si vede così che Σ è l'insieme degli ∞^2 piani contenenti le coniche di una superficie del 4° ordine di Veronese. Per conseguenza il sistema dei piani tangenti di F, da cui Σ s'era ottenuto per dualità, sarà l'insieme dei piani tangenti di una superficie di Veronese: e quindi F sarà appunto una tal superficie. Otteniamo dunque il seguente risultato:

Le sole superficie appartenenti a S_5, *per le quali sono indeterminate in ogni punto le 5 tangenti principali, ossia per cui tutte le linee son linee principali, sono le superficie sviluppabili e la* F^4 *di Veronese.*

7. Il concetto di *linea principale* per una superficie di S_5 si può illustrare da un nuovo punto di vista, con la seguente considerazione, che è evidentemente capace di essere ulteriormente estesa.

Precisiamo l'*ordine infinitesimale di vicinanza*, per due piani infinitamente prossimi, di S_5, assumendoli in una ∞^1 di piani, che determiniamo con 3 punti $x\,y\,z$ funzioni di un parametro variabile t. Intenderemo cioè per « ordine di vicinanza » dei piani corrispondenti ai valori $t, t+dt$ del parametro, l'ordine infinitesimale, rispetto a dt come infinitesimo principale, del determinante

$$(9)\qquad |x(t)\,,\ y(t)\,,\ z(t)\,,\ x(t+dt)\,,\ y(t+dt)\,,\ z(t+dt)|\,.$$

È subito visto che questo numero non muta, se sostituiamo x, y, z con 3 punti qualunque, non allineati, combinazioni lineari di quelli, a coefficienti funzioni di t.

Sviluppando $x(t+dt), \ldots$ secondo le potenze di dt, risulta che il 1° termine nello sviluppo di quel determinante sarà in generale dt^3 moltiplicato pel determinante $D = |x\,y\,z\;x'\,y'\,z'|$. Dunque: in generale la vicinanza di due piani successivi è *del 3° ordine*. — Perchè venga ad essere d'ordine

(¹) Cfr. la mia Nota precedente, alla pag. 67 di questo vol. dei Rendiconti, *Sui fochi di 2° ordine dei sistemi infiniti di piani, e sulle curve iperspaziali con una doppia infinità di piani plurisecanti.*

superiore, dovrà annullarsi D. Supposto che ciò accada per ogni valore di t, s'annullerà pure la derivata di D: la quale è precisamente il coefficiente di $\frac{1}{2}dt^4$ nello sviluppo di (9). Vediamo così che *se in una ∞^1 di piani l'ordine di vicinanza di due piani successivi generici è superiore al 3°, esso sarà almeno uguale a* 5. Questo caso, dell'annullamento identico di D, avverrà (« *Prelim*ⁱ » § 1) quando la V_3 luogo degli ∞^1 piani ha lungo ogni piano un S_4 (od S_3) tangente, cioè ogni piano ha un foco (punto d'incidenza col piano successivo), sicchè: o tutti i piani son tangenti ad una stessa linea, luogo di quel foco; oppure passano tutti per uno stesso punto: il che escluderemo, non essendovi occasione allora ad ulteriori ricerche, perchè il determinante (9) riesce $\equiv 0$.

Siano dunque gli ∞^1 piani tangenti ad una stessa linea L, il cui punto variabile assumeremo per $x(t)$. Potremo allora prendere y in $x'(t)$; e il determinante (9), sviluppato, diventerà

$$|x(t)\,,\; x'(t)\,,\; z(t)\,,\; x(t+dt)\,,\; x'(t+dt)\,,\; z(t+dt)| =$$
$$= \frac{1}{12}dt^5\,|x\,x'\,x''\,x'''\,z\,z'| + \frac{1}{24}dt^6\left\{|x\,x'\,x''\,x^{\text{IV}}\,z\,z'| + |x\,x'\,x''\,x'''\,z\,z''|\right\} + \cdots$$

Perchè questo risulti sempre infinitesimo d'ordine superiore al 5° dev'essere identicamente

$$(10) \qquad |x\,x'\,x''\,x'''\,z\,z'| = 0\,.$$

Derivando, si vede che sarà nullo anche il coefficiente di dt^6; sicchè: *se l'ordine di vicinanza è superiore a* 5, *esso varrà almeno* 7. Ove la V_3 luogo degli ∞^1 piani non sia sviluppabile (ordinaria), e quindi sia determinato l'iperpiano che le è tangente lungo un piano generico $x\,x'\,z$, — iperpiano di questi punti e di $x''\,z'$, — la (10) dice che esso conterrà anche x''', cioè avrà contatto quadripunto in x colla L. (Se invece la V_3 è sviluppabile, ossia l'insieme dei piani osculatori di una linea, si potrà assumere z in $x''(t)$, e si riconosce subito che l'ordine di vicinanza di due piani successivi sale a 9).

In tal modo quelle varietà di ∞^1 piani, che s'erano già incontrate al n. 3 in relazione colle linee principali di F, risultan caratterizzate sotto un nuovo aspetto: in esse due piani successivi son più prossimi fra loro (ordine 7), che non nel caso generale (ordine 3), e nel caso di ∞^1 piani tangenti ad una linea, senz'altra particolarità (ordine 5).

Ritornando appunto al n. 3 e all'insieme dei piani tangenti di una superficie, potremo ora dire che: *mentre due piani tangenti successivi di una superficie hanno in generale vicinanza del 5° ordine, se i loro punti di contatto stanno su una stessa linea principale la vicinanza è del 7° ordine (almeno).* E il teorema finale del n. 6 si potrà anche enunciare così: *Se una superficie appartenente ad* S_5 *è tale che due piani tangenti successivi abbian sempre vici-*

nanza d'ordine superiore al 5°, *la superficie è sviluppabile* (l'ordine di vicinanza = 9), *oppure è la* F^4 *di Veronese* (l'ordine di vicinanza è infinito, perchè i piani tangenti sono a due a due incidenti).

8. Il fatto che l'ordine infinitesimale di vicinanza di due piani di S_5 salta da 3 a 5, da 5 a 7, da 7 a 9, rientra in una proposizione generale relativa agli S_k di S_{2k+1}, con k pari.

Introduciamo per questi S_k le coordinate di Grassmann: determinanti d'ordine $k+1$ estratti dalla matrice delle coordinate omogenee di $k+1$ punti indipendenti. Indichiamole con p_r, ove r sia un numero $1, 2, \ldots, \binom{2k+2}{k+1}$, con cui si rappresenti una determinata permutazione di $k+1$ fra gl'indici $1, 2, \ldots, 2k+2$ di quelle coordinate omogenee di punti. Anzi, indichino 1 e 2, come pure 3 e 4, e poi 5 e 6, ecc., delle permutazioni *complementari*, nel senso che, prese insieme nell'ordine indicato, costituiscano una permutazione pari di tutti gl'indici $1, 2, \ldots, 2k+2$. Allora, *nell'ipotesi fatta che k sia pari*, il determinante delle coordinate dei $2k+2$ punti che determinano due S_k, p e q, si potrà scrivere come forma bilineare alternata delle coordinate di questi spazi: $[p, q] = (p_1 q_2 - p_2 q_1) + (p_3 q_4 - p_4 q_3) + \cdots$ [1]. E così il determinante analogo a (9), che serve a valutare l'ordine di vicinanza di due S_k, viene a rappresentarsi con $[p(t)\ ,\ p(t+dt)]$; che, sviluppando $p(t+dt)$ secondo le potenze di dt, diventa $\Sigma \frac{1}{a!}[p\, , p^a]\, dt^a$ (significando con p_r^a la derivata d'ordine a di p_r rispetto a t). L'ordine di vicinanza sarà dato, in ciascun caso, dal primo indice a che comparirà effettivamente in questa serie: vale a dire dal primo a tale che la $[p\, , p^a]$ non sia nulla. Come al n. preced^e si riconoscerà che quest'ordine è almeno uguale a $k+1$.

Ciò premesso, supponiamo che l'*ordine di vicinanza sia* $m+1$ (*almeno*), cioè che sian nulle, identicamente rispetto a t, tutte le $[p\, , p^a]$ con $a \leq m$. Dico che saran pure nulle tutte le $[p^b, p^c]$ con $b + c \leq m$. Invero da $[p\, , p^{a-1}] = 0$, derivando rispetto a t, e tenendo conto che $[p\, , p^a] = 0$, segue $[p', p^{a-1}] = 0$, per $a \leq m$. Quindi anche $[p', p^{a-2}] = 0$; sicchè, derivando e basandosi sulla precedente, si ha $[p'', p^{a-2}] = 0$. Così pure sarà $[p'', p^{a-3}] = 0$; e derivando, e valendosi dell'ultima, si trae: $[p''', p^{a-3}] = 0$. E così via.

Fissando ora che $m+1$ sia pari $= 2\mu$, avremo dunque:

$$[p\, , p^m] = 0\ ,\ [p', p^{m-1}] = 0\ ,\ [p'', p^{m-2}] = 0, \ldots, [p^{\mu-1}, p^{\mu}] = 0,$$

[1] Cfr. il principio della mia Memoria *Sui complessi lineari di piani nello spazio a cinque dimensioni* (Annali di Matem. (3) 27, 1918, pag. 75).

e derivando:

$$[p, p^{m+1}] + [p', p^m] = 0\ ,\ [p', p^m] + [p'', p^{m-1}] = 0\ ,\ [p'', p^{m-1}] + \\ + [p''', p^{m-2}] = 0\ ,\ \ldots\ [p^{\mu-1}, p^{\mu+1}] + [p^\mu, p^\mu] = 0\ ,$$

donde, essendo $[p^\mu, p^\mu] = 0$, segue $[p, p^{m+1}] = 0$; sicchè l'ordine effettivo di vicinanza risulta almeno $m+2$, e non $m+1$.

Concludiamo che: *in* S_{2k+1}, *quando* k *è pari, l'ordine infinitesimale di vicinanza di due* S_k *è sempre dispari.*

Matematica. — *Sulla teoria degl'integrali semplici di 1ª specie appartenenti ad una superficie algebrica.* Nota III del Corrispondente Francesco Severi.

6. Esposte nelle Note I, II (¹) le necessarie premesse di carattere prettamente algebrico, e conservando le notazioni precedenti, poniamo

$$(17)\qquad u_i = \int \frac{\varphi_i(x, y, z)}{f'_z(x, y, z)}\, dx \qquad (i = 1, 2, \ldots, p),$$

sicchè u_i è un integrale abeliano di 1ª specie sulla curva variabile $f(x, y, z) = 0$, con y parametro. Supporremo, una volta per sempre, che gli assi coordinati sieno disposti genericamente, per guisa che nel fascio $y = \text{cost.}$ non vi sia che un numero finito di piani tangenti (ordinarî) alla superficie F. La curva segata su F, fuori della linea doppia, da $f'_z = 0$ non ha allora nessuna parte situata in qualche piano $y = \text{cost.}$, e quindi u_i non diventa mai identicamente infinito, qualunque sia il piano $y = \text{cost.}$ che si considera. L'integrale u_i può però diventare di 3ª specie in corrispondenza ai *valori singolari* di y (valori di y che dànno i piani $y = \text{cost.}$ tangenti ad F). Se $y = b$ è uno di questi piani tangenti e ne è (a, b, c) il punto di contatto, che designeremo brevemente con α, l'integrale u_i relativo alla curva $f(x, b, z) = 0$, avrà generalmente due punti logaritmici sovrapposti, sui due rami di tale curva uscenti da α. Ma questi punti logaritmici possono anche mancare, cioè u_i può rimanere di 1ª specie anche per $y = b$. Questo accade allora e solo allora che la superficie $\varphi_i(x, y, z) = 0$ passi per α.

Gli integrali u_i saranno linearmente indipendenti per ogni valore di y, che non sia critico pel sistema lineare L delle $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_p$: i valori critici di L continueranno a chiamarsi *critici* anche rispetto agl'integrali u_i. Tra

(¹) Questi Rendiconti, pag. 163 e pag. 204.