ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA NAZIONALE
DEI LINCEI

ANNO CCCXVIII.

1921

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXX.

1° Semestre.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1921

e derivando:

$$[p, p^{m+1}] + [p', p^m] = 0 \;,\; [p', p^m] + [p'', p^{m-1}] = 0 \;,\; [p'', p^{m-1}] + \\ + [p''', p^{m-2}] = 0 \;, \dots [p^{\mu-1}, p^{\mu+1}] + [p^\mu, p^\mu] = 0 \,,$$

donde, essendo $[p^\mu, p^\mu] = 0$, segue $[p, p^{m+1}] = 0$; sicchè l'ordine effettivo di vicinanza risulta almeno $m + 2$, e non $m + 1$.

Concludiamo che: *in* S_{2k+1}, *quando* k *è pari, l'ordine infinitesimale di vicinanza di due* S_k *è sempre dispari.*

Matematica. — *Sulla teoria degl'integrali semplici di 1ª specie appartenenti ad una superficie algebrica.* Nota III del Corrispondente FRANCESCO SEVERI.

6. Esposte nelle Note I, II (¹) le necessarie premesse di carattere prettamente algebrico, e conservando le notazioni precedenti, poniamo

$$u_i = \int \frac{\varphi_i(x, y, z)}{f'_z(x, y, z)}\, dx \qquad (i = 1, 2, \dots, p), \tag{17}$$

sicchè u_i è un integrale abeliano di 1ª specie sulla curva variabile $f(x, y, z) = 0$, con y parametro. Supporremo, una volta per sempre, che gli assi coordinati sieno disposti genericamente, per guisa che nel fascio $y = \text{cost.}$ non vi sia che un numero finito di piani tangenti (ordinarî) alla superficie F. La curva segata su F, fuori della linea doppia, da $f'_z = 0$ non ha allora nessuna parte situata in qualche piano $y = \text{cost.}$, e quindi u_i non diventa mai identicamente infinito, qualunque sia il piano $y = \text{cost.}$ che si considera. L'integrale u_i può però diventare di 3ª specie in corrispondenza ai *valori singolari* di y (valori di y che dànno i piani $y = \text{cost.}$ tangenti ad F). Se $y = b$ è uno di questi piani tangenti e ne è (a, b, c) il punto di contatto, che designeremo brevemente con α, l'integrale u_i relativo alla curva $f(x, b, z) = 0$, avrà generalmente due punti logaritmici sovrapposti, sui due rami di tale curva uscenti da α. Ma questi punti logaritmici possono anche mancare, cioè u_i può rimanere di 1ª specie anche per $y = b$. Questo accade allora e solo allora che la superficie $\varphi_i(x, y, z) = 0$ passi per α.

Gli integrali u_i saranno linearmente indipendenti per ogni valore di y, che non sia critico pel sistema lineare L delle $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_p$: i valori critici di L continueranno a chiamarsi *critici* anche rispetto agl' integrali u_i. Tra

(¹) Questi Rendiconti, pag. 163 e pag. 204.

questi valori critici deve comprendersi, come sappiamo, il valore $y = y_0$ se

$$\varphi_{q+1} = (y - y_0)\,\psi_{q+1}\,, \ldots, \varphi_p = (y - y_0)\,\psi_p\,,$$

le $\psi_{q+1} = 0\,, \ldots, \psi_p = 0$ essendo $p - q$ aggiunte indipendenti d'ordine $m - 3$; o il valore $y = \infty$, se si è preso addirittura

$$\varphi_{q+j} = \psi_{q+j} \qquad (j = 1\,, \ldots, p - q).$$

Qui è opportuno notare in modo esplicito un fatto, a prima giunta paradossale. Quando la superficie è regolare ($q = p_g - p_a = 0$) si possono prendere le $\varphi_1\,, \ldots, \varphi_p$ coincidenti colle $\psi_1\,, \ldots, \psi_p$, ed allora sembra che non vi sieno per gl'integrali u_i altri valori critici che quelli del sistema $\lambda_1\,\psi_1 + \cdots + \lambda_p\,\psi_p = 0$ e non il valore $y = \infty$. Cosicchè a prima vista si è tratti a concludere che per una superficie regolare di genere $p_g = 0$ gl'integrali u_i, scelti nel modo suddetto, non hanno alcun valore critico! E ciò contraddirebbe al modo come si costruiranno poi gl'integrali semplici di 1ª specie di F, a partire appunto da un sistema d'integrali privo di valori critici. Ma in realtà, anche nel caso in cui le $\varphi_1\,, \ldots, \varphi_p$, per essere la superficie regolare, possono identificarsi con altrettante superficie aggiunte d'ordine $m - 3$, $y = \infty$ continua ad esser critico per gl'integrali u_i, come quando, essendo $q > 0$, s'identificavano le $\varphi_{q+1}\,, \ldots, \varphi_p$ colle $\psi_{q+1}\,, \ldots, \psi_p$. Per convincersene si assoggetti lo spazio alla trasformazione omografica

$$(18) \qquad x = \frac{x'}{y'}\,, \quad y = \frac{1}{y'}\,, \quad z = \frac{z'}{y'}\,,$$

che muta il fascio $y =$ cost. nel fascio $y' =$ cost. ed il piano $y = \infty$ nel piano $y' = 0$.

Designata con ψ una qualunque delle $\psi_{q+1}\,, \ldots, \psi_p$ ($q \geqq 0$) e posto

$$f(x\,, y\,, z) \equiv g(x\,, y\,, z) + h(x\,, y\,, z) + \cdots$$
$$\psi(x\,, y\,, z) \equiv \eta(x\,, y\,, z) + \zeta(x\,, y\,, z) + \cdots,$$

ove $g, h, \ldots$ son costituiti da tutti i termini dei gradi rispettivi $m\,, m - 1\,, \ldots$ del polinomio f, e similmente $\eta\,, \zeta\,, \ldots$ son polinomi omogenei dei gradi rispettivi $m - 3\,, m - 4\,, \ldots$, si trova subito che l'integrale $u = \int \frac{\psi}{f'_z} dx$ trasformasi, mediante la (18), nell'integrale di 1ª specie

$$u' = y' \int \frac{\eta(x'\,, 1\,, z') + y'\zeta(x'\,, 1\,, z') + \cdots}{g'_{z'}(x'\,, 1\,, z') + y'\,h_{z'}(x'\,, 1\,, z') + \cdots}\, dx'$$

relativo alla curva $g(x'\,, 1\,, z') + y'h(x'\,, 1\,, z') + \cdots = 0$. Sul piano $y' = 0$ si ha pertanto identicamente $u' = 0$. E ciò significa che gl'*integrali* $\int \frac{\psi_{q+j}}{f'_z} dx$, $(j = 1\,, \ldots, p - q)$, *ove* $\psi_{q+1} = 0\,, \ldots, \psi_p = 0$ *sieno aggiunte d'ordine* $m - 3$ *ad* F, *si annullano identicamente per* $y = \infty$.

Da ciò intanto segue che $y=\infty$ è critico anche per $q=0$; e questo dirime l'accennato paradosso. Ponendo $\varphi_j=(y-y_0)\psi_j$, il valore $y=\infty$, nel caso $q=0$, cessa di esser critico, ma si ha invece come valore critico $y=y_0$. In ogni caso si conclude che *fra i valori critici degli integrali u_i $(i=1,\dots,p)$ ce n'è sempre uno ($y=y_0$ o $y=\infty$) per cui gl'integrali $u_{q+1},\dots,u_p$ si annullano identicamente.*

7. Fissato un valore iniziale generico $y=\gamma$, distinto dai valori singolari, sulla riemanniana $f(x,\gamma,z)=0$, consideriamo un sistema di p retrosezioni $\overline{A}_j,\overline{B}_j$ $(j=1,\dots,p)$. Variando y con continuità a partire da γ, quel sistema di retrosezioni si muta in un sistema di retrosezioni A_j, B_j per la curva variabile $f(x,y,z)=0$; e finchè (sul piano ov'è distesa la variabile complessa y) si va da γ ad un altro valore non singolare γ', con un cammino ben determinato, nessuna ambiguità è possibile nella definizione delle retrosezioni limiti sulla curva $f(x,\gamma',z)=0$, in quanto ogni punto di diramazione della riemanniana variabile tende ad una ben definita posizione limite. L'esame, fatto da Picard, circa il modo di comportarsi dei cicli della curva variabile $f(x,y,z)=0$, nell'intorno di un valore singolare di y, permette di precisare agevolmente che cosa succede quando y circola attorno o addirittura va a coincidere con un valor singolare (1). Ma per ora non ci occorre di specificar di più, bastandoci solo di avvertire che, se da γ si va ad un altro valore non singolare γ', gl'infiniti sistemi di retrosezioni che si ottengono sulla $f(x,\gamma',z)=0$, in corrispondenza ai singoli cammini descritti da y, costituiscono tanti sistemi di $2p$ cicli primitivi di $f(x,\gamma',z)=0$; e quindi che i cicli di uno qualunque di quei sistemi si esprimono come combinazioni lineari a coefficienti interi dei cicli di uno prefissato fra essi.

Premesso tutto ciò e supposto che il valore iniziale $y=\gamma$, oltrechè distinto dai valori singolari, lo sia anche dai valori critici degl'integrali u_i, indichiamo con $\overline{\omega}_{ij},\overline{\omega}_{i,p+j}$ i periodi dell'integrale u_i, relativo alla curva $f(x,\gamma,z)=0$, lungo i cicli $\overline{B}_j,\overline{A}_j$ percorsi nel verso positivo; e sieno $\omega_{ij},\omega_{i,p+j}$ i periodi che derivano per continuità da quelli, quando y varia a partire da γ. Finchè y non va a coincidere con un valore singolare o critico, ha luogo la relazione riemanniana:

$$\sum_{j=1}^{p}(\omega_{ij}\,\omega_{k.p+j}-\omega_{kj}\,\omega_{i.p+j})=0 \qquad (i,k=1,\dots,p)$$

(1) I punti attorno a cui si produce una sostituzione lineare a coefficienti interi sui cicli A_j, B_j sono soltanto i valori singolari (Picard). Veramente *a priori* potrebbe sembrare che analogo fatto si producesse in corrispondenza ai punti di contatto delle tangenti tripunte di F parallele all'asse z, in quanto anche in ciascuno di essi coincidono due punti di diramazione della superficie di Riemann variabile $f(x,y,z)=0$. Ma un tal dubbio si rimuove subito, osservando che quei punti cessano d'essere di diramazione se, invece di x, si prende come variabile indipendente z.

e la diseguaglianza fondamentale

$$\sum_{j=1}^{p}(\omega'_j\,\omega''_{p+j}-\omega''_j\,\omega'_{p+j})>0\,, \tag{19}$$

ove

$$\omega_j=\omega'_j+\omega''_j\sqrt{-1}\quad,\quad \omega_{p+j}=\omega'_{p+j}+\omega''_{p+j}\sqrt{-1}$$

sieno i periodi, lungo i cicli B_j, A_j, d'una qualsiasi combinazione lineare u, a coefficienti interi non tutti nulli, degl'integrali u_i. Tutto ciò perchè la curva variabile $f(x,y,z)=0$ non s'abbassa di genere, le A_j, B_j non cessan di essere su essa retrosezioni e gl'integrali u_i non cessano d'esser su di essa linearmente indipendenti.

Immaginiamo ora il corpo Ω di funzioni abeliane relative alla tabella dei periodi ω_{ih} ($i=1,\dots,p$; $h=1,\dots,2p$), i quali son funzioni olomorfe di y nell'intorno di ogni valore non singolare. Per un teorema classico [1], queste funzioni abeliane si esprimono razionalmente mediante le funzioni Θ relative alla tabella

$$\begin{matrix}1 & 0 & \dots & 0 & \varrho_{11} & \dots & \varrho_{1p}\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ 0 & 0 & \dots & 1 & \varrho_{p1} & \dots & \varrho_{pp}\end{matrix}\qquad(\varrho_{ik}=\varrho_{ki})\,,$$

ove le ϱ son definite dalle

$$\omega_{i.p+j}=\sum_{k=1}^{p}\omega_{ik}\,\varrho_{kj}\qquad(i,j=1,\dots,p)\,, \tag{20}$$

e gli argomenti $w_1,\dots,w_p$ delle Θ son legati agli argomenti $v_1,\dots,v_p$ di quel corpo di funzioni abeliane, dalle relazioni

$$v_i=\sum_{k=1}^{p}\omega_{ik}\,w_k\qquad(i=1,\dots,p)\ \text{[2]}. \tag{21}$$

La condizione di convergenza delle suddette serie Θ [che si può esprimere mediante la diseguaglianza (19)] [3], *resta sempre soddisfatta qualunque sia* y, *purchè diverso dai valori critici e singolari*. La forma delle relazioni (20), (21), che definiscono le ϱ, w, considerata insieme al fatto classico che il determinante delle ω_{ik} non è nullo pei valori considerati di y (perchè altrimenti gl'integrali u_i sarebbero dipendenti), ci assicura che le Θ, nel campo di variabilità considerato per y, restano sempre finite.

Consideriamo adesso le funzioni del corpo Ω quali funzioni sia degli argomenti $v_1,\dots,v_p$, come di y (attraverso ai periodi ω). Nel parallelepi-

(1) Krazer, *Lehrbuch der Thetafunktionen* (Leipzig, Teubner, 1903), pag. 127.
(2) Krazer, loc. cit., pag. 123.
(3) Krazer, loc. cit., pag. 124.

polo dei periodi esse non hanno alcuna singolarità essenziale (Krazer, p. 115) come funzioni delle sole $v_1, \dots, v_p$. È facile da ciò dedurre che le dette funzioni sono, anche rispetto ad y, nell'intorno di ogni valore ordinario $y = \gamma'$, o olomorfe o meromorfe. Infatti, se una Φ delle funzioni di Ω è, per $y = \gamma'$, funzione olomorfa di $v_1, \dots, v_p$ nell'intorno di $v_1 = c_1, \dots, v_p = c_p$ (ove $c_1, \dots, c_p$ sieno valori finiti prefissati degli argomenti v), essa resta finita e uniforme, e perciò olomorfa, anche come funzione di y nell'intorno di γ'. Se invece per $y = \gamma'$ la suddetta Φ si esprime come quoziente $\frac{H}{K}$ di due funzioni H, K olomorfe nell'intorno di $(c_1, \dots, c_p)$, ciascuna delle H, K sarà olomorfa anche come funzione di y nell'intorno di γ' e quindi Φ sarà funzione meromorfa di y. Pertanto:

Ogni funzione abeliana del corpo Ω è funzione olomorfa o meromorfa di y attorno ad ogni valore non singolare nè critico.

Astronomia. — *Sulla applicazione del calcolo vettoriale alla Astronomia.* Nota del Socio A. Abetti [1].

Il prof. A. Antoniazzi, direttore dell'Osservatorio di Padova, successore del compianto illustre maestro Lorenzoni, già a sua volta successore di quell'altra gloria nostra che fu il toscano Santini [2], ha resa pubblica una sua Memoria [3], che è un primo passo di applicazione del calcolo vettoriale all'Astronomia sferica; e ciò dopo che ne aveva esperimentati i vantaggi applicandolo, nelle sue lezioni, all'Astronomia teorica, cioè alle trattazioni relative alle orbite planetarie [4].

Nella suddetta Memoria di pagine 60, circa la metà sono impiegate ad esibire quelle nozioni di calcolo vettoriale, che occorsero per applicarlo alla correlazione fra i vettori e le coordinate cartesiane ed i circoli della sfera celeste, ed inoltre per la trasformazione di coordinate, per i problemi di moto diurno e siderale e per le orbite planetarie. È sembrato allo scrivente tale l'importanza della prefata Memoria da sentirsi spinto ad incoraggiarne, con parole proprie, lo studio ai giovani astronomi a cui oggi spetta

(1) Presentata nella seduta del 20 marzo 1921.

(2) Di Caprese aretino n. 1787 m. 1877. Il suo testo del 1830, Padova, Tip. Seminario, tiene per noi Italiani altrettanto bene il luogo quanto il Chauvenet ed il Brünnow per gli Inglesi e Tedeschi.

(3) Antoniazzi A. M., *Di un rapido procedimento didattico per la trattazione dei principali problemi dell'Astronomia*. Atti del R. Istituto Veneto, tomo LXXIX, Parte seconda (adunanza 8 luglio 1920).

(4) Un'applicazione simile venne a me sott'occhio colla quinta edizione degli *Elementi di Fisica* del collega prof. Ròiti e nel vol. II: *Elettricità e Magnetismo*, alle prime pagine sono date le nozioni preliminari sui campi vettoriali.