ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA NAZIONALE

DEI LINCEI

ANNO CCCXVIII.

1921

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXX.

1° Semestre.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1921

pedo dei periodi esse non hanno alcuna singolarità essenziale (Krazer, p. 115) come funzioni delle sole $v_1, \dots, v_p$. È facile da ciò dedurre che le dette funzioni sono, anche rispetto ad y, nell'intorno di ogni valore ordinario $y = \gamma'$, o olomorfe o meromorfe. Infatti, se una Φ delle funzioni di Ω è, per $y = \gamma'$, funzione olomorfa di $v_1, \dots, v_p$ nell'intorno di $v_1 = c_1, \dots, v_p = c_p$ (ove $c_1, \dots, c_p$ sieno valori finiti prefissati degli argomenti v), essa resta finita e uniforme, e perciò olomorfa, anche come funzione di y nell'intorno di γ'. Se invece per $y = \gamma'$ la suddetta Φ si esprime come quoziente $\frac{\mathrm{H}}{\mathrm{K}}$ di due funzioni H, K olomorfe nell'intorno di $(c_1, \dots, c_p)$, ciascuna delle H, K sarà olomorfa anche come funzione di y nell'intorno di γ' e quindi Φ sarà funzione meromorfa di y. Pertanto:

Ogni funzione abeliana del corpo Ω è funzione olomorfa o meromorfa di y attorno ad ogni valore non singolare nè critico.

Astronomia. — *Sulla applicazione del calcolo vettoriale alla Astronomia.* Nota del Socio A. Abetti [1].

Il prof. A. Antoniazzi, direttore dell'Osservatorio di Padova, successore del compianto illustre maestro Lorenzoni, già a sua volta successore di quell'altra gloria nostra che fu il toscano Santini [2], ha resa pubblica una sua Memoria [3], che è un primo passo di applicazione del calcolo vettoriale all'Astronomia sferica; e ciò dopo che ne aveva esperimentati i vantaggi applicandolo, nelle sue lezioni, all'Astronomia teorica, cioè alle trattazioni relative alle orbite planetarie [4].

Nella suddetta Memoria di pagine 60, circa la metà sono impiegate ad esibire quelle nozioni di calcolo vettoriale, che occorsero per applicarlo alla correlazione fra i vettori e le coordinate cartesiane ed i circoli della sfera celeste, ed inoltre per la trasformazione di coordinate, per i problemi di moto diurno e siderale e per le orbite planetarie. È sembrato allo scrivente tale l'importanza della prefata Memoria da sentirsi spinto ad incoraggiarne, con parole proprie, lo studio ai giovani astronomi a cui oggi spetta

[1] Presentata nella seduta del 20 marzo 1921.

[2] Di Caprese aretino n. 1787 m. 1877. Il suo testo del 1830, Padova, Tip. Seminario, tiene per noi Italiani altrettanto bene il luogo quanto il Chauvenet ed il Brünnow per gli Inglesi e Tedeschi.

[3] Antoniazzi A. M., *Di un rapido procedimento didattico per la trattazione dei principali problemi dell'Astronomia*. Atti del R. Istituto Veneto, tomo LXXIX, Parte seconda (adunanza 8 luglio 1920).

[4] Un'applicazione simile venne a me sott'occhio colla quinta edizione degli *Elementi di Fisica* del collega prof. Ròiti e nel vol. II: *Elettricità e Magnetismo*, alle prime pagine sono date le nozioni preliminari sui campi vettoriali.

raccogliere ed aumentare il nostro patrimonio scientifico. Con questo intendimento è sembrato utile fare il tentativo di produrre ed illustrare quanto più popolarmente sia possibile uno degli esempi di quella Memoria, mettendo in evidenza la celerità con cui il calcolo vettoriale riesce a stabilire formole già note ed in uso e state dedotte per vie diverse e principalmente colla trigonometria sferica.

* * *

Certe grandezze astratte come le forze, la velocità e l'accelerazione, sono rappresentabili con segmenti di rette (¹) a cui fu convenuto di assegnare una lunghezza, ragguagliata ad una unità di misura, e presa per un verso, positivo o negativo secondo che si considera il segmento da un estremo oppure dall'altro, ed ancora di esso è assegnata la direzione fondamentale scelta per riferimento. Tali grandezze si chiamano « vettori » (²) e costituiscono un algoritmo geometrico a cui sono applicabili le operazioni algebriche e del calcolo infinitesimale, e per la sua proprietà di prendere in conto la direzione, ossia la posizione nello spazio, risolve prontamente ed elegantemente i problemi che del medesimo fanno al caso nostro.

Un vettore individuato da un segmento OA si rappresenta colla notazione A — O in cui si deve intendere il senso preso da O verso A e si legge A meno O, e giova, a quella rappresentazione simbolica, un'unica lettera in grassetto così che con

$$A - O = \mathbf{a}$$

si deve per noi intendere il vettore **a** che fisso in O variando la sua direzione in ogni senso è capace per via del punto A di descrivere la superficie di una sfera.

I raggi visuali che dal nostro occhio, centro della sfera celeste, sono diretti alle stelle sono altrettanti vettori, e poichè per la risoluzione dei problemi della sfera fu ideata la Trigonometria sferica, nonchè assegnate le correlazioni con un sistema di assi ortogonali, oggi l'applicazione del calcolo vettoriale all'Astronomia, rivelato nella Memoria dell'Antoniazzi, è un primo passo di correlazione del nuovo metodo coi precedenti. Siccome i raggi vettori abbisognano di riferimento, il più logico di tutti sarà quello dei tre assi

(¹) Sia che si tratti di grandezze ad una, a due od a tre dimensioni, cioè grandezze lineari, superficiali o cubiche. Quest'ultime contengono il concetto di spazio per tutti i punti del medesimo i quali costituiscono una triplice infinità che viene rappresentata con la terza potenza dell'infinito, cioè ∞^3.

(²) Il calcolo vettoriale ebbe i suoi precursori, o padri che si vogliano dire, e fra questi va notato il Bellavitis dell'Università di Padova che inventò nel 1832 il metodo delle « equipollenze » e lo espose nel Cap. III del suo trattato: *Elementi di geometria, trigonometria e geometria analitica*. Padova, Tip. del Seminario, 1862.

ortogonali che partono dal centro O della sfera e la incontrano ai vertici A′A″A‴, oppure ABC od altrimenti, del ben noto trirettangolo e determinano colla nuova veduta tre vettori fondamentali. I tre piani comprendenti a due a due i tre assi formano un triedro che ha il vertice in O e per base, sulla sfera, il trirettangolo che dunque ha i tre angoli retti, e tali sono anche i diedri, ed ha per lati i tre archi di cerchio massimo di 90° intersezioni della sfera celeste coi tre piani coordinati.

Intendiamo ora di vedere il trirettangolo della sfera disegnato sul piano della carta come nella fig. 1; i tre vettori fondamentali che partono dal centro O della sfera la incontreranno nei tre punti XYZ.

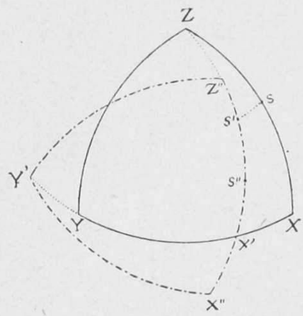

FIG. 1.

Supposto che sulla sfera il punto mobile S si stacchi dal piano fondamentale ZX verso di noi che guardiamo la figura, avremo, col soccorso dei vecchi precetti, che una qualunque sua nuova posizione (S) resta determinata da due coordinate sferiche, che sono l'angolo sferico in Z e la distanza polare Z(S). Ad ogni mutazione di posto della S corrisponde una variazione di queste coordinate e, nel tempo stesso, corrisponde una variazione del vettore S — O che passa in (S) — O. Ora questa variazione vettoriale può immaginarsi dipendente da una rotazione [1] suscettibile di essere riferita e decomposta, secondo i tre assi coordinati.

S'immagini ora il sistema dei quattro punti XYZS rigidamente congiunto, come si trattasse di una configurazione stellare, e ruoti esso da X verso Y intorno a Z e di più pensiamo a volontà che Z rappresenti o il polo del mondo, o quello dell'eclittica, o l'altro dell'orizzonte, cioè il zenit.

[1] Su questo concetto della rotazione vedasi nelle Astr. Nachr. 5011, l'articolo: *Ein didaktisches Hilfsmittel zur sphärischen Astronomie*, von E. Anding.

In causa della rotazione intorno a Z questo punto resta immobile e gli altri tre punti prendono le posizioni segnate con un apice. Alla posizione S' corrisponde una variazione dv dell'angolo al polo, che secondo i casi sarà, senza considerazione di segno, $d\alpha$, $d\lambda$ oppure dA. Una seconda rotazione intorno ad Y' porterà S' in S'' aumentando la distanza polare di S di una quantità dp corrispondente, in valore assoluto, ad una variazione $d\delta$, $d\beta$ oppure dh. Queste due rotazioni possiamo anche pensarle concomitanti alternate, od anche inverse, nel qual caso però occorrono le considerazioni di segno, perchè in realtà il punto S può passare in S'' in un numero infinito di modi.

Notiamo ora che una qualunque rotazione intorno ad S non sposta questo punto del pari come non si spostò Z nella prima rotazione nè Y' nella seconda, e quest'avvertenza ci fa conoscere che se noi avremo bisogno di una rotazione arbitraria per concludere i valori delle variazioni delle due coordinate sferiche potremo applicarla insieme alle due già viste, immaginando che per tutte tre il punto si sia trasportato da S in S''. Nel caso in parola è la somma delle due rotazioni intorno a Z e ad Y' che porta S in S'', ed in questa somma di due termini si può immaginare un terzo termine, corrispondente ad una rotazione intorno ad X, il quale venga annullato da una rotazione arbitraria. Il punto S sulla sfera celeste può, come si disse, passare in S'' in un numero infinito di modi; ma noi possiamo dire che supposto di conoscere la rotazione per cui il vettore S — O è diventato S'' — O possiamo scomporla in tre secondo gli assi e ve ne possiamo aggiungere anche un'altra intorno ad S capace di annullare quella su X; allora le altre due daranno le formole per le variazioni delle due coordinate sferiche.

***

Ora riporteremo l'esempio dato nella Memoria ai §§ 51, 52 relativo alle formole che esprimono la variazione annua in longitudine e latitudine delle stelle.

L'attrazione del Sole e della Luna sul rigonfiamento equatoriale dello sferoide terrestre combinata con la rotazione diurna produce un movimento del piano dell'equatore per cui la linea degli equinozî, ossia l'intersezione dei due piani, gira lentamente nel piano dell'eclittica in direzione opposta a quella in cui si contano le longitudini, che pertanto su di una eclittica fissa o media, corrispondente ad un'epoca t_0 come p. es. il principio dell'anno 1800, aumentano tutte della ben nota quantità chiamata la *precessione lunisolare*.

D'altra parte, le mutue attrazioni fra i pianeti e la Terra tendono continuamente a rimuovere questa dal suo piano, così che esso cambia di posizione senza influire su quella dell'equatore che in questo caso è riguardato come fisso o medio; ed è questa la *precessione planetaria* che modifica l'effetto della precedente e per cui si ha ciò che si chiama la *precessione* *generale.* Per essa l'equinozio di primavera, origine delle longitudini e delle ascensioni rette, assume ad ogni istante una posizione celeste retrograda bene determinata.

Se ψ_1 è la precessione generale (1), l'equinozio nel tempo infinitesimo (2) dt retrograda con velocità (3) $\frac{d\psi_1}{dt}$ sull'eclittica del tempo t; e questa non è altro che una rotazione di senso retrogrado intorno al suo polo. D'altra parte l'eclittica ha un movimento di rotazione intorno alla linea che unisce

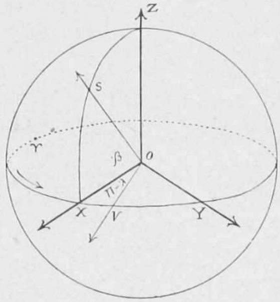

Fig. 2.

i due punti o nodi in cui si tagliano le due posizioni della medesima ai tempi t e $t + dt$. Ed è questa una variazione $\frac{d\pi}{dt}$ dell'inclinazione π dell'eclittica t rispetto alla media eclittica del tempo *1800* + t ossia una rotazione rappresentabile con un vettore diretto al nodo ascendente.

Nella fig. 2 è data disegnata prospetticamente la sfera celeste, intendendo che le longitudini siano contate dall'equinozio di primavera ♈ verso X e V nel senso della freccia. Si supponga che l'asse Z sia diretto al polo dell'eclittica, che VY sia il piano di questa al tempo t, che per il piano ZX resti determinato sulla sfera celeste il cerchio di latitudine della stella S di coordinate λ, β e finalmente che il segmento OV rappresenti il vettore $\frac{d\pi}{dt}$

(1) Cfr. Chauvenet, *A Manual of Spherical und Pratical Astronomy*, vol. I, *Precession*, §§ 364-370.

(2) Se si pensa che l'equinozio percorre in ciascun anno sull'eclittica un arco di 50″.2 e si fa il rapporto fra l'intera circonferenza di 360° e questo arco, si trova che occorrono circa 26000 anni affinchè l'equinozio percorra l'intera eclittica, supposto che conservi la velocità con cui si muove attualmente. Pertanto una unità di tempo dt di un anno o frazione del medesimo è da riguardarsi come un infinitesimo.

(3) Velocità che è la derivata dello spazio percorso rispetto al tempo.

la cui direzione è data dalla longitudine Π. Sarà allora l'angolo VOX la differenza fra le longitudini del vettore e della stella, cioè eguale a $\Pi - \lambda$.

Decomponiamo ora il vettore nelle due rotazioni complanari su X ed Y

$$\frac{d\pi}{dt}\cos(\Pi-\lambda) \qquad \frac{d\pi}{dt}\operatorname{sen}(\Pi-\lambda)$$

e ricordando che l'equinozio di primavera, da cui sono contate le longitudini di V e di S, è retrogradato per una rotazione $-\frac{d\psi_1}{dt}$ intorno a Z, diremo che lo spostamento totale del vettore S — O ha, rispetto ai tre vettori fondamentali, le tre componenti che seguono.

X	Y	Z
$\frac{d\pi}{dt}\cos(\Pi-\lambda)$	$\frac{d\pi}{dt}\operatorname{sen}(\Pi-\lambda)$	$-\frac{d\psi_1}{dt}$

Aggiungiamo ora una rotazione arbitraria intorno alla direzione della stella S; indicando con c una costante arbitraria potremo rappresentare quella rotazione con le tre componenti proiettate sui tre assi, e cioè con

$$c\cos\beta \quad | \quad 0 \quad | \quad c\operatorname{sen}\beta\,.$$

In base alle due formole vettoriali stabilite dal prof. Antoniazzi al § 29 della sua Memoria, deve la costante arbitraria c esser tale da annullare la rotazione intorno ad X, quindi deve essere

$$c\cos\beta = -\frac{d\pi}{dt}\cos(\Pi-\lambda)$$

da cui

$$c = -\frac{d\pi}{dt}\cos(\Pi-\lambda)\frac{1}{\cos\beta}\,.$$

Ed ora, conforme al precetto delle stesse formole, facciamo la somma delle tre colonne ed avremo il nuovo prospetto

$$\begin{array}{r|l} \text{per X} & 0 \\ \text{» Y} & \frac{d\pi}{dt}\operatorname{sen}(\Pi-\lambda) \\ \text{» Z} & -\frac{d\psi_1}{dt} - \frac{d\pi}{dt}\cos(\Pi-\lambda)\frac{\operatorname{sen}\beta}{\cos\beta}\,. \end{array}$$

Riferendoci alla fig. 1 vediamo che la prima rotazione che si fa intorno a Z esprime la variazione della longitudine e quella intorno ad Y la variazione in distanza polare, che qui per noi è il complemento della latitudine. D'altra parte la prima rotazione fa retrogradare l'equinozio, cioè l'origine delle longitudini, per cui queste aumentano, così che l'espressione del $\frac{d\lambda}{dt}$ sarà quella per Z mutata di segno, quindi

$$\frac{d\lambda}{dt}=\frac{d\psi_1}{dt}+\frac{d\pi}{dt}\cos(\Pi-\lambda)\operatorname{tg}\beta\,.$$

L'espressione di latitudine, complemento della distanza polare, avrà l'espressione trovata per Y pure mutata di segno, cioè sarà:

$$\frac{d\beta}{dt}=-\frac{d\pi}{dt}\operatorname{sen}(\Pi-\lambda)\,.$$

Le due formole corrispondono pienamente a quelle del Chauvenet al problema del § 370 della determinazione della precessione annua in longitudine [1] e là si trovano indicate col numero (655), ben inteso che in esse i nostri $\frac{d\psi_1}{dt}$ e $\frac{d\pi}{dt}$ sono i coefficienti numerici calcolati dallo Chauvenet per l'epoca *1800* $+\,t$.

Chimica. — *A proposito di un lavoro del prof. E. Salkowski sopra le melanine.* Nota del Socio Angelo Angeli e di Antonio Pieroni [2].

Lo scorso anno [3] il prof. E. Salkowski ha pubblicato un lavoro sopra le melanine ricavate da alcuni tumori umani, nel quale dopo di avere esposto un metodo che permette di isolare questi interessanti pigmenti senza correre pericolo di alterarli in seguito a trattamenti con reattivi troppo energici, quale p. es. l'acido cloridrico concentrato consigliato da altri autori, descrive le proprietà dei prodotti così ottenuti e varie reazioni eseguite con lo scopo di trovare qualche fatto che permetta di formarsi un criterio almeno approssimato sopra la natura chimica di queste sostanze.

Siccome si tratta di un argomento del quale noi pure in questi ultimi anni, sebbene da un altro punto di vista, ci siamo occupati, così abbiamo reputato opportuno di sottoporre ad un attento esame i fatti importanti stabiliti dal Salkowski e soprattutto le conseguenze che egli ne ricava, ed a questo proposito dobbiamo subito dire che noi non condividiamo in tutto il suo modo di vedere.

(1) *To find the annual precession in longitude for a given date*, vol. I, ediz. 2ª, pag. 610, § 370.

(2) Presentata nella seduta del 3 aprile 1921.

(3) Virchow's, Archiv. Band *227*, II (1920), pag. 121.