ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA NAZIONALE

DEI LINCEI

ANNO CCCXVIII.

1921

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXX.

1° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1921

MEMORIE E NOTE PRESENTATE DA SOCI

Meccanica. — *Sui moti limiti di un sistema semirigido ruotante attorno ad un punto fisso e sottratto all'azione di forze esterne.* Nota di O. LAZZARINO, presentata dal Corrisp. R. MARCOLONGO [1].

In una Nota precedente [2], alla quale mi riferisco per la parte bibliografica, ho esteso al caso generale di un solido avente un numero qualunque di cavità riempite da liquidi viscosi *compressibili* e ruotante attorno ad un punto fisso una notevole formola di Joukowski che dà la variazione nell'unità di tempo dell'energia cinetica del sistema.

Indicando con T questa energia, con P′ e P'_r rispettivamente i vettori della velocità assoluta e relativa di un qualunque punto P delle masse fluide e con μ i coefficienti di viscosità dei liquidi, ho dimostrato che sussiste la formola

$$\text{(I)} \qquad \frac{dT}{dt} = -\frac{1}{2}\sum_1^h \int_\sigma a \times P'_r \cdot d\sigma - \sum_1^h \int_\tau \mu I_1\left(\frac{dP'_r}{dP} \cdot K \frac{dP'}{dP}\right) d\tau$$

dove gl'integrali s'intendono estesi rispettivamente alle superficie σ e agli spazi τ delle h cavità del sistema, e con a è designato il vettore della forza di attrito fra solido e liquidi.

Ora, supponendo che col variare del tempo i termini del 2° membro della (I) si annullino, si ha un particolare moto del sistema che può chiamarsi « *moto limite* » il cui studio, per via intrinseca, è oggetto della presente Nota.

1. MOTO LIMITE E SUE PRINCIPALI PROPRIETÀ. — Osservando che il coefficiente μ di viscosità è un numero positivo e che per i liquidi viscosi il vettore a della forza di attrito non è nullo nè perpendicolare al vettore P'_r, dalla (I) risulta chiaro che per l'annullarsi del 2° membro è necessario e basta che siano soddisfatte le condizioni

$$\text{(1)} \qquad P'_r = 0 \quad , \quad I_1\left(\frac{dP'_r}{dP} \cdot K \frac{dP'}{dP}\right) = 0 .$$

Ora, per formole note [3], la seconda delle (1) può anche scriversi

$$I_1\left(\frac{dP'_r}{dP} \cdot K \frac{dP'}{dP}\right) = I_1 \frac{dP'}{dP} \cdot I_1 \frac{dP'_r}{dP} + I_2 \frac{dP'}{dP} + I_2 \frac{dP'_r}{dP} - I_2\left(\frac{dP'}{dP} + \frac{dP'_r}{dP}\right)$$

[1] Presentata nella seduta del 5 dicembre 1929.

[2] O. Lazzarino, *Sulla variazione dell'energia cinetica di un sistema semirigido ruotante attorno ad un punto fisso quando sia nullo il momento rispetto a questo punto delle forze esterne* [questi Rendiconti, ser. 5ª, vol. XXX, 1° sem., fasc. 4°, pag. 113].

[3] C. Burali-Forti et R. Marcolongo, *Analyse vectorielle générale* (a. 1912, tom. I, pag. 34 [7] e pag. 44 [2]). Questo testo sarà indicato in seguito con la sigla AVG.

e da qui si vede che la 2ª delle (1) è conseguenza della 1ª, onde si può dire che il moto limite del sistema è caratterizzato dalla sola condizione $P'_r = 0$ la quale importa come soluzione unica

$$P' = \Omega \wedge (P - O) \tag{2}$$

cioè « *il moto limite del sistema è caratterizzato dal fatto che le masse fluide si comportano come se formassero un tutto rigido con la parte solida* ».

Si possono dimostrare alcune notevoli proprietà di questo moto.

Sostituendo l'espressione (2) di P' nella (VI') della Nota precedente [loc. cit. (1)], si ha

$$[\Omega \wedge (P - O)]' = \mathrm{grad}_P (\Pi - U) + \\ + \frac{\lambda + \mu}{\varrho} \mathrm{grad\ div} [\Omega \wedge (P - O)] + \nu \Delta' [\Omega \wedge (P - O)]. \tag{3}$$

Ora, il 1° membro della (3) porge

$$[\Omega \wedge (P - O)]' = \Omega' \wedge (P - O) + \Omega \times (P - O) \cdot \Omega - \Omega^2 \cdot (P - O);$$

quanto al 2° membro si osserva che i due ultimi termini sono nulli: infatti, essendo $\mathrm{rot}_P (P - O) = 0$, $\Delta' (P - O) = 0$ ed Ω indipendente da P, per formole note si ha

$$\mathrm{grad\ div} [\Omega \wedge (P - O)] = \mathrm{grad} [\mathrm{rot}_P \Omega \times (P - O) - \mathrm{rot}_P (P - O) \times \Omega] = 0$$

$$\Delta' [\Omega \wedge (P - O)] = \\ = \Omega \wedge \Delta' (P - O) - (P - O) \wedge \Delta' \Omega + 4 V \left(\frac{d(P - O)}{dP} \cdot K \frac{d\Omega}{dP} \right) = 0.$$

Quindi la (3) può scriversi

$$\Omega' \wedge (P - O) + \Omega \times (P - O) \cdot \Omega - \Omega^2 (P - O) = \mathrm{grad}_P (\Pi - U). \tag{4}$$

Osservando ora che il 2° membro della (4) è funzione dei punti P ma non del tempo, si ha $\Omega' = 0$ e quindi, se Ω_0 è un vettore *costante*, può scriversi

$$\Omega = \Omega_0 \tag{5}$$

e perciò si conclude che « *nelle ipotesi fatte, il moto limite del sistema è una rotazione uniforme attorno ad un asse fisso nello spazio* ».

Inoltre, poichè per $P'_r = 0$ risulta $M'_r = 0$, dalla (I) della Nota citata e dalla (5) si ha

$$\Omega_0 \wedge (\alpha \Omega_0 + M) = 0 \tag{6}$$

e, ponendo $\alpha \Omega_0 + M = \alpha_1 \Omega_0$, dove α_1 è l'omografia d'inerzia rispetto al punto fisso O di tutto il sistema, si può anche scrivere

$$\Omega_0 \wedge \alpha_1 \Omega_0 = 0 \tag{7}$$

cioè « *nel moto limite, l'asse costante di rotazione* $O\Omega_0$ *risulta parallelo ad una delle direzioni unite dell'omografia d'inerzia, relativa al punto fisso, del sistema totale costituito dalla parte rigida e dalla parte fluida considerata come formante un sistema rigido* ».

2. Casi possibili di moti limiti. — Supponendo che l'omografia α_1 d'inerzia sia arbitraria, si possono presentare diversi casi nei quali la (7) può essere soddisfatta.

a) Se α_1 è tale che l'ellissoide d'inerzia, di centro O, relativo al sistema totale risulti un ellissoide a *tre assi diseguali*, per soddisfare alla (7) è necessario che l'asse costante $O\Omega_0$ di rotazione coincida con uno degli assi principali del detto ellissoide. Perciò si conclude che « *il moto limite del sistema sarà, in questo caso, una rotazione permanente attorno ad uno dei tre assi principali dell'ellissoide d'inerzia di tutto il sistema rispetto al punto fisso* ».

b) Se poi α_1 è tale che l'ellissoide d'inerzia risulti di rivoluzione attorno ad un asse, allora « *nel moto limite, l'asse permanente di rotazione del sistema può coincidere col detto asse o con una qualunque delle rette del fascio di centro* O *avente per sostegno il piano principale di inerzia normale all'asse di rivoluzione dell'ellissoide* ».

c) Se, infine, α_1 è un numero, l'ellissoide d'inerzia si riduce ad una sfera di centro O e allora « *nel moto limite, l'asse permanente di rotazione può coincidere con uno qualunque dei raggi della stella di centro* O ».

In tutti questi casi la grandezza della velocità di rotazione è arbitraria ma costante e l'asse di rotazione si mantiene fisso per tutta la durata del moto. Tenendo conto della natura del sistema qui considerato, risulta evidente che i detti moti comprendono come casi particolari i noti moti di Dirichlet relativi ad un solido avente una sola cavità di forma ellissoidale o sferica riempita da liquido perfetto.

3. Condizioni per la permanenza dei moti delle masse fluide viscose. — Supposti permanenti i moti delle masse fluide, si ha *mod* $P' = cost$ in tutti i punti P dello spazio da esse occupato e risulta quindi $P'' = 0$. Allora dalla (IV) della Nota citata si ricava, per un punto qualunque P del contorno, $\Omega' \wedge (P - O) \times \mathbf{n} = 0$ e da qui segue $\Omega' = 0$, $\Omega = \text{cost}$, cioè « *la rotazione del sistema deve essere permanente* ». Allora l'energia cinetica risulta costante e dalla (I) si ha la relazione

$$\frac{1}{2}\sum_1^h \int_\sigma a \times P'_r \cdot d\sigma + \sum_1^h \int_\tau \mu I_1 \left(\frac{dP'_r}{dP} \cdot K \frac{dP'}{dP}\right) d\tau = 0$$

che, come si è dimostrato precedentemente, ammette come *soluzione unica*

$$P' = \Omega \wedge (P - O). \tag{8}$$

Ripetendo il ragionamento in senso inverso, si vede facilmente che la (8),

oltre ad essere *necessaria*, è anche *sufficiente* per la permanenza dei moti delle masse fluide. Si può quindi concludere che « *il solo caso possibile di moti permanenti delle masse fluide viscose è caratterizzato dalla* (8) *e corrisponde al fatto fisico che, per effetto della viscosità, il fluido debba aderire così perfettamente alle pareti della rispettiva cavità che risulti* $P'_r = 0$. *Allora il sistema ruota con moto uniforme attorno ad un asse fisso come se fosse completamente rigido* ».

Tenendo anche presente quanto è stato dimostrato nel § 1, si può ancora dire che « *l'unico caso possibile di moti permanenti delle masse fluide è un moto limite del sistema* ».

Idrodinamica. — *Circuitazione superficiale.* III: *Il teorema della forza sostentatrice nel caso di una corrente fluida spaziale.* Nota di MARIO PASCAL, presentata dal Corrisp. R. MARCOLONGO [1].

Il teorema di Joukowski o della *forza sostentatrice* dà, come è noto [2], l'espressione di una delle componenti della resistenza totale incontrata da un contorno di ostacolo opposto ad una corrente fluida piana parallela, mediante il prodotto della densità del fluido, della velocità limite della corrente e della circuitazione delle velocità lungo una linea chiusa circondante l'ostacolo, circuitazione che, nel caso che le velocità dipendano da un potenziale, è uguale a quella calcolata lungo il contorno stesso dell'ostacolo.

Con la scorta del nuovo concetto di *circuitazione superficiale* che abbiamo introdotto e dei risultati che abbiamo raggiunto nelle Note precedenti [3], ci è possibile ora dimostrare il seguente teorema che può considerarsi come l'estensione del teorema di Joukowski al caso di una corrente fluida spaziale.

Se una corrente fluida spaziale di velocità limite V_0, *diretta nel senso negativo dell'asse* x, *investe un ostacolo, la risultante delle pressioni del fluido sulla superficie dell'ostacolo giace nel piano* yz. *Il valore delle sue componenti secondo gli assi* y *e* z *è rispettivamente uguale al prodotto della densità del fluido e della velocità limite della corrente per le componenti secondo gli assi suddetti del vettore della circuitazione superficiale, calcolata lungo la superficie dell'ostacolo.*

[1] Presentata nella seduta del 5 dicembre 1920.

[2] N. Joukowski, *Aérodynamique* [trad. par S. Drzewiecki], Paris, Gauthier Villars, 1916; H. Lamb, *Hydrodynamics*, Cambridge, 1916, pag. 666. Ved. inoltre: P. Burgatti, *Sopra un teorema di Joukowski relativo alla forza sostentatrice nei corpi in moto traslatorio uniforme entro un fluido.* Rend. R. Acc. di Bologna, 1917-18.

[3] M. Pascal, *Circuitazione superficiale.* I: *Estensione dell'ordinario concetto di circuitazione.* Questi Rendiconti, vol. XXIX, 1920, 2° sem., pag. 353; II: *Sua espressione vettoriale e teoremi generali analoghi a quelli sulla ordinaria circuitazione* Questi Rendiconti, vol. XXX, 1921, 1° sem., pag. 117.