ATTI
DELLA
REALE ACCADEMIA NAZIONALE
DEI LINCEI

ANNO CCCXVIII.

1921

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXX.

1° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1921

oltre ad essere *necessaria*, è anche *sufficiente* per la permanenza dei moti delle masse fluide. Si può quindi concludere che « *il solo caso possibile di moti permanenti delle masse fluide viscose è caratterizzato dalla* (8) *e corrisponde al fatto fisico che, per effetto della viscosità, il fluido debba aderire così perfettamente alle pareti della rispettiva cavità che risulti* $P'_r = 0$. *Allora il sistema ruota con moto uniforme attorno ad un asse fisso come se fosse completamente rigido* ».

Tenendo anche presente quanto è stato dimostrato nel § 1, si può ancora dire che « *l'unico caso possibile di moti permanenti delle masse fluide è un moto limite del sistema* ».

Idrodinamica. — *Circuitazione superficiale.* III: *Il teorema della forza sostentatrice nel caso di una corrente fluida spaziale.* Nota di Mario Pascal, presentata dal Corrisp. R. Marcolongo [1].

Il teorema di Joukowski o della *forza sostentatrice* dà, come è noto [2], l'espressione di una delle componenti della resistenza totale incontrata da un contorno di ostacolo opposto ad una corrente fluida piana parallela, mediante il prodotto della densità del fluido, della velocità limite della corrente e della circuitazione delle velocità lungo una linea chiusa circondante l'ostacolo, circuitazione che, nel caso che le velocità dipendano da un potenziale, è uguale a quella calcolata lungo il contorno stesso dell'ostacolo.

Con la scorta del nuovo concetto di *circuitazione superficiale* che abbiamo introdotto e dei risultati che abbiamo raggiunto nelle Note precedenti [3], ci è possibile ora dimostrare il seguente teorema che può considerarsi come l'estensione del teorema di Joukowski al caso di una corrente fluida spaziale.

Se una corrente fluida spaziale di velocità limite V_0, *diretta nel senso negativo dell'asse* x, *investe un ostacolo, la risultante delle pressioni del fluido sulla superficie dell'ostacolo giace nel piano* yz. *Il valore delle sue componenti secondo gli assi* y *e* z *è rispettivamente uguale al prodotto della densità del fluido e della velocità limite della corrente per le componenti secondo gli assi suddetti del vettore della circuitazione superficiale, calcolata lungo la superficie dell'ostacolo.*

(1) Presentata nella seduta del 5 dicembre 1920.

(2) N. Joukowski, *Aérodynamique* [trad. par S. Drzewiecki], Paris, Gauthier Villars, 1916; H. Lamb, *Hydrodynamics*, Cambridge, 1916, pag. 666. Ved. inoltre: P. Burgatti, *Sopra un teorema di Joukowski relativo alla forza sostentatrice nei corpi in moto traslatorio uniforme entro un fluido*. Rend. R. Acc. di Bologna, 1917-18.

(3) M. Pascal, *Circuitazione superficiale*. I: *Estensione dell'ordinario concetto di circuitazione*. Questi Rendiconti, vol. XXIX, 1920, 2° sem., pag. 353; II: *Sua espressione vettoriale e teoremi generali analoghi a quelli sulla ordinaria circuitazione* Questi Rendiconti, vol. XXX, 1921, 1° sem., pag. 117.

Dimostreremo tale teorema basandoci — come fa il Joukowski — sul teorema di Eulero, esprimendo cioè che tutte le forze che agiscono sopra una massa fluida in movimento sono equilibrate dalle forze dovute alle quantità di moto.

Sia H un corpo che formi ostacolo ad una corrente non vorticosa, di velocità limite V_0, diretta nel senso negativo dell'asse x; il potenziale di velocità sia

$$\varphi = - V_0 x + f(x, y, z)$$

in cui f è una funzione tale che le sue derivate sono nulle a distanza infinita.

Circondato l'ostacolo con una qualsiasi superficie chiusa, ad esempio una sfera σ, per il teorema di Eulero, applicato alla massa fluida compresa fra la superficie dell'ostacolo e quella della sfera σ, la somma delle pressioni $-X$, $-Y$, $-Z$ esercitate da H sul fluido; delle pressioni idrodinamiche p; e delle forze dovute alle quantità di moto, deve essere nulla.

Le componenti della velocità sono

$$u = - V_0 + \frac{\partial f}{\partial x} \; ; \; v = \frac{\partial f}{\partial y} \; ; \; w = \frac{\partial f}{\partial z},$$

e quindi, se α, β, γ sono gli angoli che la normale interna a σ forma con gli assi, e ϱ è la densità del fluido, la massa di fluido che nell'unità di tempo entra attraverso l'elemento $d\sigma$ è

$$\varrho \left[\left\{ - V_0 + \frac{\partial f}{\partial x} \right\} \cos\alpha + \frac{\partial f}{\partial y} \cos\beta + \frac{\partial f}{\partial z} \cos\gamma \right] d\sigma \, ;$$

una formola nota ci dà poi

$$p = \text{cost.} - \frac{\varrho}{2} \left[\left\{ - V_0 + \frac{\partial f}{\partial x} \right\}^2 + \left\{ \frac{\partial f}{\partial y} \right\}^2 + \left\{ \frac{\partial f}{\partial z} \right\}^2 \right].$$

Si ha così

$$(1) \left\{ \begin{aligned} X = {} & \int_\sigma p \cos\alpha \, d\sigma + \\ & + \varrho \int_\sigma \left\{ - V_0 + \frac{\partial f}{\partial x} \right\} \left[\left\{ - V_0 + \frac{\partial f}{\partial x} \right\} \cos\alpha + \frac{\partial f}{\partial y} \cos\beta + \frac{\partial f}{\partial z} \cos\gamma \right] d\sigma \\ Y = {} & \int_\sigma p \cos\beta \, d\sigma + \\ & + \varrho \int_\sigma \frac{\partial f}{\partial y} \left[\left\{ - V_0 + \frac{\partial f}{\partial x} \right\} \cos\alpha + \frac{\partial f}{\partial y} \cos\beta + \frac{\partial f}{\partial z} \cos\gamma \right] d\sigma \\ Z = {} & \int_\sigma p \cos\gamma \, d\sigma + \\ & + \varrho \int_\sigma \frac{\partial f}{\partial z} \left[\left\{ - V_0 + \frac{\partial f}{\partial x} \right\} \cos\alpha + \frac{\partial f}{\partial y} \cos\beta + \frac{\partial f}{\partial z} \cos\gamma \right] d\sigma . \end{aligned} \right.$$

Eseguendo le sostituzioni e gli sviluppi indicati, e trascurando i termini cha risultano essere infinitesimi di ordine superiore, oppure del tipo $\{\text{cost.} \cos\alpha \, d\sigma\}$, si ottiene facilmente

$$X = \varrho V_0 \int_\sigma \frac{\partial f}{\partial x} \cos\alpha \, d\sigma - \varrho V_0 \int_\sigma \frac{\partial f}{\partial x} \cos\alpha \, d\sigma -$$

$$- \varrho V_0 \int_\sigma \left[\left\{ -V_0 + \frac{\partial f}{\partial x} \right\} \cos\alpha + \frac{\partial f}{\partial y} \cos\beta + \frac{\partial f}{\partial z} \cos\gamma \right] d\sigma = 0$$

poichè l'ultimo integrale, non essendo altro che la quantità totale di fluido entrato nella sfera σ, è nullo.

Le altre due componenti diventano invece

$$(2) \qquad \begin{cases} Y = \varrho V_0 \int_\sigma \left\{ \frac{\partial f}{\partial x} \cos\beta - \frac{\partial f}{\partial y} \cos\alpha \right\} d\sigma \\ Z = -\varrho V_0 \int_\sigma \left\{ \frac{\partial f}{\partial z} \cos\alpha - \frac{\partial f}{\partial x} \cos\gamma \right\} d\sigma . \end{cases}$$

Gli integrali che figurano nelle precedenti espressioni sono rispettivamente le componenti secondo gli assi z e y del vettore della circuitazione superficiale dovuta alla parte di velocità che dipende dalla funzione f, e calcolata lungo la superficie σ.

Ma siccome il moto è stato supposto a potenziale, per un teorema dimostrato nella Nota precedente, e chiamando con I^{xy}, I^{zx} le componenti secondo z e y della circuitazione superficiale calcolata lungo la superficie dell'ostacolo H, le (2) possono scriversi:

$$(3) \qquad \begin{cases} Y = \varrho V_0 I^{xy} \\ Z = -\varrho V_0 I^{zx} . \end{cases}$$

La risultante di queste due forze giace evidentemente nel piano yz, e potrebbe anche essere facilmente costruita. Tale risultante è quella che, nel caso che ci occupa, può assumere il nome di *forza sostentatrice*.