ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

ANNO CCCXVIII.

1921

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXX.

1° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1921

Matematica. — *Sulle varietà a tre dimensioni e di quart'ordine che son luoghi di almeno* ∞^2 *rette.* Nota I di Eugenio G. Togliatti, presentata dal Socio C. Segre (*).

1. La dimensione dello spazio normale d'una V_3^4 irriducibile è ≤ 6 (1); ed è noto che una V_3^4 di S_6, che non sia un cono proiettante da un punto una superficie di Veronese, contiene una serie razionale ∞^1 di piani (2); escluso che V_3^4 sia un cono, quegli ∞^1 piani uniscono terne di punti omologhi di due rette a, b e d'una conica c, riferite proiettivamente (3).

Tale V_3^4 contiene ∞^3 rette Viceversa, se per un punto generico P di una V_3^4 irriducibile, che non sia un cono, passano infinite rette della V_3^4 (4), questa contiene ∞^1 piani (5), costituenti una serie razionale (perchè un iperpiano generico contenente uno di essi sega ancora V_3^4 in una F^3 rigata non cono), dimodochè la V_3^4 coincide con la precedente o con una sua proiezione (3).

La proiezione W_3^4 della V_3^4 di S_6 anzidetta da una retta generica r dell'S_6 sopra un S_4, σ, ha come superficie doppia una rigata cubica normale F (6): infatti, un S_4 proiettante generico sega V_3^4 in una C^4 razionale normale che ha tre corde incidenti ad r. Si vede poi subito che l'S_5 proiettante rab contiene due piani μ, ν di V_3^4, e perciò contiene un S_3 proiettante (intersezione degli S_4: $r\mu$, $r\nu$) che sega μ, ν in due rette m, n, e la cui traccia d su σ è quindi una retta doppia di W_3^4, anzi proprio la direttrice rettilinea di F, perchè le ∞^1 coniche di V_3^4 passanti per le sin-

(*) Presentata nella seduta del 16 gennaio 1921.

(1) V. ad es. Bertini, *Introduzione alla geometria proiettiva degli iperspazi*, Pisa (1907), Cap. 9°, n. 6.

(2) V. ad es. Bertini, loc. cit., Cap. 14°, n. 10.

(3) Segre, *Sulle varietà normali a tre dimensioni composte di serie semplici razionali di piani*, Atti Acc. Torino, 21 (1885-1886), pp. 95-115. Questa stessa V_3^4 trovasi in: G. C. Young, *Sulla varietà razionale normale* M_3^4 *di* S_6 *rappresentante della trigonometria sferica*, id., 34 (1898-1899), pp. 587-596.

(4) Anzi ∞^1, se no la V_3^4 conterrebbe l'S_3 che la tocca in P.

(5) Severi, *Intorno ai punti doppi impropri di una superficie generale dello spazio a quattro dimensioni, e a' suoi punti tripli apparenti*, Rendiconti Palermo, 15 (1901), pp. 33-51, n. 10.

(6) Aprile, *Sulla varietà, dell'* S_4, *del quarto ordine, con rigata cubica normale doppia*, Atti Acc. Gioenia, (5) 7, (1914), Mem. XXII, pp. 1-21.

gole coppie di punti di m, n situate su rette incidenti ad r ([7]) stanno in piani anche incidenti ad r, e si proiettano su σ in altrettante rette doppie di W_3^4 incidenti a d.

Tra le proiezioni particolari della V_3^4 di S_6, che non discutiamo minutamente, rileviamo solo la V_3^4 di S_4 con piano triplo, che si ha quando r sta nell'S_4 d'una rigata cubica della V_3^4 di S_6, rigata che può anche spezzarsi in un piano della V_3^4 e nella quadrica direttrice minima ([8]).

Le V_3^4 qui considerate sono le sole V_3^4 irriducibili, non coni, a curve-sezioni razionali ([9]).

2. Consideriamo ora in S_5 una V_3^4 rigata, irriducibile, normale, non cono; essa avrà curve-sezioni ellittiche, perciò sarà la base d'un fascio di quadriche di S_5 ([10]). Anche questa è notissima ([11]); la sua proiezione in S_4 da un punto generico O ha una quadrica doppia, traccia del cono quadrico intersezione della quadrica del fascio che passa per O col suo S_4 tangente in O ([12]). Viceversa, ogni V_3^4 irriducibile di S_4, non cono, a curve-sezioni ellittiche, è proiezione della precedente ([13]).

3. Fermiamoci sulle V_3^4 irriducibili, rigate, non coni, normali in S_4. Gli ∞^1 S_3 tangenti ad una tale V_3^4 nei punti d'una generatrice generica g inviluppano, di regola, un cono quadrico di 2ª specie avente g come retta doppia, ma possono formare fascio intorno ad un piano contenente g e che

([7]) Rappresentando V_3^4 su un S_3 col sistema lineare ∞^6 di tutte le quadriche contenenti una stessa retta [Segre, loc. cit., nota ([3])], le rette dell'S_3 rappresentano coniche di V_3^4.

([8]) Quest'ultimo caso è noto: v. Fano, *Sulle varietà algebriche dello spazio a quattro dimensioni con un gruppo continuo integrabile di trasformazioni proiettive in sè*, Atti Ist. Veneto, (7) 7 (1895-1896), pp. 1069-1103, n. 4.

([9]) Enriques, *Sui sistemi lineari di superficie algebriche ad intersezioni variabili iperellittiche*, Math. Ann., 46 (1895), pp. 179-199, n. 9 (ed anche la nota dello stesso A.: *Sui sistemi lineari di superficie algebriche le cui intersezioni variabili sono curve iperellittiche*, questi Rend., (5) 2 (1893_2), pp. 281-287, nota ([3]) a p. 282).

([10]) Enriques, *Sui sistemi lineari di superficie algebriche le cui intersezioni variabili sono curve ellittiche*, questi Rend., (5) 3 (1894_1), pp. 481-487, § 3 (vedi anche, nei Math. Ann., il n. 13 della Nota dello stesso A. citata nella nota prec.).

([11]) Segre, *Studio sulle quadriche in uno spazio lineare ad un numero qualunque di dimensioni*, Mem. Acc. Torino, (2) 36 (1885), pp. 3-86, parte II.

([12]) Casi speciali della V_3^4 di S_4 con F^2 doppia si trovano in: Snyder, *On cyclical Quartic Surfaces in Space of N dimensions*, Bull. Amer. Math. Soc., (2) 6 (1899-1900), pp. 194-198; Aprile, *Di alcune congruenze, d'ordine due, di superficie nell'S_4 e di coniche nell'S_3*, Mem. Acc. Acireale, (3) 10 (1918-1919), § 2. Altri casi speciali notevoli sono: la V_3^4 luogo delle rette incidenti a due coniche generiche di S_4, la V_3^4 luogo delle rette che uniscono punti omologhi di due piani generici di S_4 riferiti in corrispondenza quadratica.

([13]) Enriques, loc. cit. nella nota ([10]), § 1.

risulta tangente a V_3^4 lungo g, oppure possono coincidere tutti in uno stesso S_3 tangente a V_3^4 lungo g ([14]). Siano: α un piano generico contenente g, γ la cubica piana intersezione ulteriore di α con V_3^4, ed A, B, C i punti comuni a g e γ. Nel 1° caso, due di questi punti, ad es. A, B, son punti di contatto di α con V_3^4, e C è punto doppio di V_3^4; il luogo di C, non potendo essere una linea direttrice di V_3^4 ([14]), sarà un piano π, doppio per V_3^4, unisecante le generatrici di V_3^4 (nn. 1 e 2).

Viceversa, una V_3^4 di S_4 con piano doppio π ([15]) è rigata, perchè luogo di ∞^1 quadriche a due dimensioni situate negli S_3 passanti per π, e non ammette, in generale, degli spazî tangenti fissi lungo ogni generatrice.

4. Se invece V_3^4 ammette lungo g un piano tangente fisso, uno solo dei punti A, B, C, ad es. A, è punto di contatto di α con V_3^4, mentre B, C sono multipli per V_3^4.

a) Se B, C sono distinti, e perciò doppî per V_3^4, essi non possono descrivere entrambi una superficie, doppia per V_3^4, perchè questa verrebbe di ordine > 1; nè possono descrivere due linee direttrici di V_3^4 (o un'unica direttrice bisecante le generatrici di V_3^4), se no V_3^4 avrebbe lungo g un S_3 tangente fisso ([14]); perciò B, ad es., descrive un piano doppio π, e C descrive una linea doppia irriducibile L, unisecante le generatrici di V_3^4, la quale sarà quindi un caso speciale di quella del n. 3. Un S_3 generico contenente π sega ancora V_3^4 in una quadrica irriducibile che ha su ogni generatrice un punto doppio di V_3^4 non situato su π, e che perciò è un cono col vertice su L. Cioè L è luogo dei vertici di detti coni, ed è incontrata in un sol punto variabile dagli S_3 contenenti π; perciò L non può essere di ordine ≥ 5, se no un S_3 generico taglierebbe V_3^4 in una F^4 avente una retta doppia e, fuori di questa, almeno 5 punti doppî, tra i quali almeno due dovrebbero stare su una retta incidente a π ([16]), e quindi anche in un S_3, certo variabile, contenente π. Se poi L sta in un piano, segante π in un punto solo, essa è di ordine ≤ 3, perchè una retta generica del suo piano, essendo sghemba con π, sarebbe doppia per V_3^4 se ne contenesse più di tre punti doppî. Dunque L può essere: una retta sghemba con π; una conica incidente a π; una C^3 piana con un punto doppio su π; una C^3 sghemba con due punti (distinti o no) su π; una C^4 di 2ª specie, di un S_3, con tre punti allineati (distinti o no) su π; una C^4 razionale normale con tre punti (distinti o no) su π.

([14]) Segre, *Preliminari di una teoria delle varietà luoghi di spazî*, Rend. Palermo, 30 (1910_2), pp. 87-121, nn. 9, 12 e § 5, 6.

([15]) Marletta, *Sulle varietà del quarto ordine con piano doppio dello spazio a quattro dimensioni*, Giorn. di Matem., 40 (1902), pp. 265-274, 41 (1903), pp. 47-61 e 113-128.

([16]) Salmon-Fiedler, *Analytische Geometrie des Raumes*, II Theil, 3 Aufl., 1880, n. 337 a p. 445. V. anche Marletta, loc. cit. nella nota ([15]), n. 54; in quest'ultimo lavoro (nn. 51, 52, 53) si trovano gran parte delle V_3^4 qui determinate.

Scegliendo convenientemente in S_4 un sistema di coordinate proiettive omogenee $x_0\, x_1\, x_2\, x_3\, x_4$, è ovvio scrivere l'equazione di V_3^4 nei primi tre casi. Nel 4° e nel 6° caso, nelle ipotesi più generali, l'equazione di V_3^4 si ha uguagliando a zero una forma quadratica generica delle forme: $x_2 x_3$, $x_2 x_4$, $x_3^2 - x_0 x_4$, $x_4^2 - x_1 x_3$, o rispett. delle forme: $x_3\, \alpha_1^{(i)}(x_0\, x_1\, x_2\, x_3\, x_4) + {} + x_4\, \beta_1^{(i)}(x_0\, x_1\, x_2\, x_3\, x_4)$ per $i = 0, 1, 2$ (17). Nel 5° caso l'equazione di V_3^4 si può scrivere:

$$x_2^2\, \varphi_2(x_3\, x_4) + x_2\, \psi_1(x_3\, x_4)\, f + x_2\, g + f^2 = 0,$$

con:
$$f \equiv x_3\, \alpha_1(x_0\, x_1\, x_2\, x_3\, x_4) + x_4\, \beta_1(x_0\, x_1\, x_2\, x_3\, x_4)\ ;$$
$$g \equiv x_3^2\, \mu(x_0 \ldots) + x_3\, x_4\, \nu(x_0 \ldots) + x_4^2\, \pi(x_0 \ldots).$$

b) In secondo luogo, se i punti B, C coincidono in un punto doppio per γ e triplo per V_3^4, essi descrivono una linea tripla irriducibile di V_3^4, L, unisecante le generatrici, e che può esser solo una retta, od una conica: $x_3 = x_4 = \varphi_2(x_0\, x_1\, x_2) = 0$ (18). Nel 2° caso l'equazione di V_3^4 si può scrivere:

$$\varphi_2(x_0\, x_1\, x_2)\, \psi_2(x_3\, x_4) + \sum_{i=0}^{3} \alpha_1^{(i)}(x_0\, x_1\, x_2\, x_3\, x_4)\, x_3^{3-i}\, x_4^i = 0,$$

e mostra che il piano della conica è doppio per V_3^4. Se la conica si spezza in due rette distinte, la V_3^4 è caso speciale di entrambe le precedenti e contiene due sistemi di rette; la conica tripla può anche ridursi ad una retta da contar due volte (19).

(17) Indicheremo con $\alpha, \beta, \varphi, \psi, \ldots$ forme algebriche delle variabili indicate e dei gradi espressi dai loro indici. Non ci fermiamo sui casi speciali in cui V_3^4 acquista generatrici doppie o punti doppî isolati.

(18) Perchè se L non fosse piana, il piano di tre suoi punti generici starebbe su V_3^4; e se L, di ordine ≥ 3, stesse in un piano π, un piano contenente una retta s di π segherebbe V_3^4 lungo s contata almeno 3 volte, cioè π sarebbe almeno triplo per V_3^4.

(19) Un caso speciale in Fano, loc. cit. nella nota (8), n. 12.