ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA NAZIONALE

DEI LINCEI

ANNO CCCXVIII.

1921

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXX.

1° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1921

Geometria. — *Sulla teoria proiettiva delle congruenze* W. Nota del Corrispondente GUIDO FUBINI [1].

1. Recentemente il sig. Jonas nel tomo 29 degli Jahresber. d. d. math. Gesell. (1920) ha paragonato le teorie metriche delle congruenze W, dando alcune notevoli formole. Però le equazioni fondamentali, da cui egli parte, sono già state date da me in una mia Memoria del tomo 43 del Circolo Matem. di Palermo (1918-19). Nella via indicata in questo mio lavoro si potrebbero anche studiare le relazioni tra le due falde focali; le formole risultano però complicate. È merito grande dello Jonas l'avere osservato che tutte le formole si semplificano introducendo *una sola* funzione $\varDelta$. Tale funzione, che lo Jonas introduce per via *metrica*, ha però, come proveremo, significato *proiettivo*. Per tali ragioni riprendo qui lo studio *proiettivo* di una congruenza W di data prima falda focale (problema *proiettivo*, che di solito si studia per via *metrica*), partendo dalle mie equazioni fondamentali, e ricorrendo per il resto del calcolo alla funzione $\varDelta$ dello Jonas, e formole relative. Resterà così ben chiaro anche il legame con le teorie metriche usuali delle congruenze W.

2. Siano u, v assintotiche d'una superficie S; sia $2D' \, du \, dv$ la seconda forma di Gauss, ed $E du^2 + 2F \, du \, dv + G \, dv^2$ l'elemento lineare metrico, rispetto al quale calcoleremo i simboli di Christoffel. La superficie è determinata a meno di una collineazione dagli invarianti proiettivi

$$\beta = \begin{Bmatrix} 11 \\ 2 \end{Bmatrix}, \quad \gamma = \begin{Bmatrix} 22 \\ 1 \end{Bmatrix}, \quad L = \theta_{uu} - \frac{1}{2}\theta_u^2 - \beta_v - \beta\theta_v,$$

$$M = \theta_{vv} - \frac{1}{2}\theta_v^2 - \gamma_u - \gamma\theta_u$$

ove

$$\theta = \log\left(\sqrt{D'}\sqrt[4]{EG - F^2}\right) + \text{cost.} \quad , \quad \theta_u = \begin{Bmatrix} 11 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad , \quad \theta_v = \begin{Bmatrix} 22 \\ 2 \end{Bmatrix}.$$

Con x indicheremo una qualsiasi delle *quattro* quantità $x, y, z, 1$, essendo le prime tre le solite coordinate cartesiane ortogonali. Con $\bar{x}$ indichiamo le quantità che se ne deducono, moltiplicando le x per $\sqrt{\beta\gamma e^{-\theta}}$. Le $\bar{x}$ sono le coordinate proiettive *normali*, le quali, per ogni collineazione, subiscono soltanto una trasformazione lineare a coefficienti *costanti* (senza alcun fattore di proporzionalità, che potrebbe essere funzione delle u, v).

Con t indicheremo infine coordinate omogenee qualsiasi. Se S è prima falda focale di una congruenza, da ogni suo punto esce una retta della con-

[1] Presentata nella seduta del 17 aprile 1921.

gruenza, i cui punti avranno coordinate omogenee del tipo

$$(1) \qquad t_1 = \mu \bar{x} + 2(A \bar{x}_u + B \bar{x}_v) .$$

Affinchè la congruenza sia W e questo punto t_1 descriva la seconda falda focale S_1, nella mia Memoria cit. è dimostrato che si deve poter scegliere il fattore di proporzionalità delle t in guisa che

$$(2) \qquad A_v = - B\gamma \quad ; \quad B_u = - A\beta ;$$

$$(3) \qquad \mu = - B_v - A_u - B \frac{\partial \log \beta\gamma}{\partial u} - A \frac{\partial \log \beta\gamma}{\partial v} .$$

Le prime due sono appunto le stesse equazioni ritrovate più tardi dallo Jonas; dalla terza si deduce l'equazione analoga dello Jonas, passando a coordinate cartesiane. Posto $\bar{x} = \sqrt{\beta\gamma e^{-\theta}}\, x$, si trova infatti

$$t_1 = \sqrt{\beta\gamma e^{-\theta}} [(- B_v - A_u - A\theta_u - B\theta_v) x + 2A x_u + 2B x_v] .$$

Ricordando che l'ultima delle x vale 1, e dividendo per l'ultima delle t, per ottenere coordinate cartesiane x_1 del punto della seconda falda focale S_1, si trova

$$(1)_{bis} \qquad x_1 = x + \frac{A x_u + B x_v}{R} ,$$

ove

$$(3)_{bis} \qquad R = - \frac{1}{2} (B_v + A_u + A\theta_u + B\theta_v)$$

che è appunto la formola di Jonas (il quale indica con a, $-b$ le nostre A, B). Date le L, M, cioè data la superficie a meno di una collineazione, si hanno due equazioni per determinare la θ, le quali sono integrabili [1]. Per ogni valore di θ si ha dalla $(3)_{bis}$ una soluzione R della

$$R_{uv} = (\theta_{uv} + \beta\gamma) R .$$

Questa è l'equazione che si presenta nelle classiche trattazioni *metriche* delle congruenze W; ed ecco così trovato il legame tra esse e lo studio puramente proiettivo. Lo studio della seconda falda focale si potrebbe, come è detto nella mia Memoria cit., proseguire direttamente partendo dalle (1). Ma qui la idea elegantissima dello Jonas semplifica grandemente i calcoli; egli ha posto

$$\Delta = A R_u - B R_v + \frac{1}{4} (A_u + A\theta_u)^2 - \frac{1}{4} (B_v + B\theta_v)^2$$

[1] Le condizioni di integrabilità sono soddisfatte in conseguenza delle relazioni, che legano β, γ, L, M:

$$L_v = -(2\beta\gamma_u + \beta_u\gamma) \quad ; \quad M_u = -(2\gamma\beta_v + \gamma_v\beta) ;$$
$$\beta M_v + 2M\beta_v + \beta_{vvv} = \gamma L_u + 2L\gamma_u + \gamma_{uuu} .$$

che, in virtù di $(3)_{bis}$, diventa

$$(4)\qquad \varDelta = -\frac{1}{2}A^2L+\frac{1}{2}B^2M+\frac{1}{2}\left(BB_{vv}-\frac{1}{2}B_v^2\right)-\frac{1}{2}\left(AA_{uu}-\frac{1}{2}A_u^2\right).$$

La $\varDelta$ non dipende da θ, ma soltanto da L, M; *dunque $\varDelta$ ha carattere proiettivo*; essa soddisfa all'equazione

$$(5)\qquad \varDelta_{uv}+\frac{B}{A}\gamma\varDelta_u+\frac{A}{B}\beta\varDelta_v=0.$$

Partendo dalle formole di Jonas, o direttamente, si prova che le quantità $\beta_1, \gamma_1, L_1, M_1$ della seconda falda focale sono date dalle

$$(6)\qquad -\beta_1=\beta+\frac{B}{A}\frac{\varDelta_u}{\varDelta}\ ;\ L_1=L+\frac{\varDelta_{uu}}{\varDelta}-\frac{3}{2}\left(\frac{\varDelta_u}{\varDelta}\right)^2+\frac{\varDelta_u}{\varDelta}\frac{A_u}{A}$$

ed analoghe per γ_1, M_1. Si potrebbero anche trovare le coordinate proiettive *normali* $\bar{x}_1$ della seconda falda focale che si ottengono dalle cartesiane x_1 moltiplicandole per $\sqrt{\beta_1\gamma_1 e^{-\theta_1}}$. Si trova che esse sono

$$(1)_{ter}\qquad \bar{x}_1=\sqrt{\frac{\beta_1\gamma_1}{\beta\gamma}}\frac{1}{\varDelta}t_1=\sqrt{\frac{\beta_1\gamma_1}{\beta\gamma}}\frac{1}{\varDelta}(\mu\bar{x}+2A\bar{x}_u+2B\bar{x}_v).$$

Il sig. Jonas ha continuato lo studio per il teorema di permutabilità.

Dette $A_1, B_1, \varDelta_1$ le quantità finora indicate con $A, B, \varDelta$, e dette $A_2, B_2, \varDelta_2$ le quantità analoghe per una seconda congruenza W, di cui S è la prima falda focale, ed un'altra superficie S_2 è la seconda, il teorema di Bianchi ci accerta che S_1 ed S_2 sono trasformate per congruenze W di ∞^1 superficie S' (una delle quali è S). Se per es. A'_1 e B'_1 sono i valori di A, B relativi alla congruenza W di cui S_1 è la prima falda focale, e una tale S' è la seconda, le formole di Jonas, spogliate di quanto ha carattere metrico, dicono che

$$(7)\qquad \frac{\varDelta_1}{A_1}(A'_1+A_2)=-\frac{\varDelta_1}{B_1}(B'_1-B_2),$$

e che, detto ω il valore comune di questi rapporti, si ha, indicate con $\varDelta_u, \varDelta_v$ le derivate di $\varDelta_1$:

$$(8)\qquad \omega_u=\frac{A_2}{A_1}\varDelta_u\quad,\quad \omega_v=\frac{B_2}{B_1}\varDelta_v.$$

Perciò ω è determinato a meno di una costante additiva; ciò che corrisponde appunto al fatto che le S' dipendono da una costante arbitraria. ossia sono ∞^1, come afferma il teorema di permutabilità di Bianchi.

Si vede così quanta semplicità dia alla teoria proiettiva delle congruenze W *l'introduzione delle funzioni* A, B *da me fatta nella Memoria cit., e della funzione* $\varDelta$ *dello Jonas.*

La ricerca di una congruenza W di data prima falda focale è ridotta all'integrazione di (2). Le (1) o $(1)_{bis}$ od $(1)_{ter}$ dànno poi in coordinate omogenee, o cartesiane, o normali i punti della seconda falda focale; gli invarianti proiettivi, e quindi anche le forme fondamentali di questa sono dati dalle (6); le formole del teorema di reciprocità del Bianchi dalle (7), (8).

Queste formole si troverebbero, senza bisogno di ricorrere ad alcun artificio, seguendo il metodo da me indicato nella Memoria cit. Lo spazio mi vieta sia di iniziare un tale calcolo, sia di vedere come esso si dovrebbe modificare nel caso di falda focale rigata (cioè $\beta = 0$, oppure $\gamma = 0$).

Matematica. — *Sulla teoria degl'integrali semplici di 1ª specie appartenenti ad una superficie algebrica.* Nota IV del Corrispondente Francesco Severi.

8. Fissiamo ora in uno P dei punti base (impropri) del fascio $y = \text{cost.}$ la comune origine dei cammini d'integrazione per gl'integrali u_i, considerati come integrali abeliani della curva $f(x, y, z) = 0$, con y parametro. Indicati allora con $x_1(x_1, y, z_1), \dots, x_p(x_p, y, z_p)$ p punti della curva $f(x, y, z) = 0$ per y generico, le equazioni

$$u_i(x_1) + \cdots + u_i(x_p) \equiv c_i \qquad \text{(modd. periodi } \omega), \tag{22}$$

ove le c_i sieno costanti arbitrarie ed i cammini d'integrazione che vanno allo stesso punto x_j sono i medesimi per tutti gl'integrali u_i, in base al teorema d'inversione di Jacobi, saranno soddisfatte da un gruppo ben determinato di p punti della sezione stessa. Il luogo di questi gruppi di p punti è una curva C, la quale può *a priori* risultare trascendente, perchè può passare infinite volte per qualcuno dei punti base del fascio $y = \text{cost.}$ Per cercare le condizioni di algebricità della curva C sostituiremo anzitutto ad essa una curva C′ costruita nel modo seguente:

Sia M_{p+1} la varietà algebrica, a $p+1$ dimensioni, i cui punti rappresentano le serie lineari complete d'ordine p appartenenti alle ∞^1 curve $y = \text{cost.}$ Essa contiene un fascio lineare di varietà N_p, ciascuna delle quali rappresenta le g_p complete appartenenti ad una sezione $f(x, y, z) = 0$ di F. Alla curva C corrisponde su M_{p+1} una curva C′ secante in un sol punto variabile le N_p.

La sostituzione della curva C′ alla C si presenta opportuna per ciò che, pur essendo le costanti c_i del tutto generiche, così che il gruppo dei p punti da esse individuato sulla generica curva $f(x, y, z) = 0$ non è speciale (cioè forma una g_p^0 completa), tuttavia accadrà che in corrispondenza ad un insieme finito, o comunque discreto, di sezioni $y = \text{cost.}$, le costanti c_i po-