# ATTI

DELLA

# REALE ACCADEMIA NAZIONALE

## DEI LINCEI

ANNO CCCXVIII.

1921

---

SERIE QUINTA

---

## RENDICONTI

---

**Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.**

---

**VOLUME XXX.**

1° Semestre.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1921

La ricerca di una congruenza W di data prima falda focale è ridotta all'integrazione di (2). Le (1) o $(1)_{bis}$ od $(1)_{ter}$ dànno poi in coordinate omogenee, o cartesiane, o normali i punti della seconda falda focale; gli invarianti proiettivi, e quindi anche le forme fondamentali di questa sono dati dalle (6); le formole del teorema di reciprocità del Bianchi dalle (7), (8).

Queste formole si troverebbero, senza bisogno di ricorrere ad alcun artificio, seguendo il metodo da me indicato nella Memoria cit. Lo spazio mi vieta sia di iniziare un tale calcolo, sia di vedere come esso si dovrebbe modificare nel caso di falda focale rigata (cioè $\beta = 0$, oppure $\gamma = 0$).

## Matematica. — *Sulla teoria degl'integrali semplici di 1ª specie appartenenti ad una superficie algebrica.* Nota IV del Corrispondente FRANCESCO SEVERI.

8. Fissiamo ora in uno P dei punti base (impropri) del fascio $y = \text{cost.}$ la comune origine dei cammini d'integrazione per gl'integrali $u_i$, considerati come integrali abeliani della curva $f(x, y, z) = 0$, con $y$ parametro. Indicati allora con $x_1(x_1, y, z_1), \ldots, x_p(x_p, y, z_p)$ $p$ punti della curva $f(x, y, z) = 0$ per $y$ generico, le equazioni

$$u_i(x_1) + \cdots + u_i(x_p) \equiv c_i \qquad \text{(modd. periodi } \omega), \tag{22}$$

ove le $c_i$ sieno costanti arbitrarie ed i cammini d'integrazione che vanno allo stesso punto $x_j$ sono i medesimi per tutti gl'integrali $u_i$, in base al teorema d'inversione di Jacobi, saranno soddisfatte da un gruppo ben determinato di $p$ punti della sezione stessa. Il luogo di questi gruppi di $p$ punti è una curva C, la quale può *a priori* risultare trascendente, perchè può passare infinite volte per qualcuno dei punti base del fascio $y = \text{cost.}$ Per cercare le condizioni di algebricità della curva C sostituiremo anzitutto ad essa una curva C′ costruita nel modo seguente:

Sia $M_{p+1}$ la varietà algebrica, a $p+1$ dimensioni, i cui punti rappresentano le serie lineari complete d'ordine $p$ appartenenti alle $\infty^1$ curve $y = \text{cost.}$ Essa contiene un fascio lineare di varietà $N_p$, ciascuna delle quali rappresenta le $g_p$ complete appartenenti ad una sezione $f(x, y, z) = 0$ di F. Alla curva C corrisponde su $M_{p+1}$ una curva C′ secante in un sol punto variabile le $N_p$.

La sostituzione della curva C′ alla C si presenta opportuna per ciò che, pur essendo le costanti $c_i$ del tutto generiche, così che il gruppo dei $p$ punti da esse individuato sulla generica curva $f(x, y, z) = 0$ non è speciale (cioè forma una $g_p^0$ completa), tuttavia accadrà che in corrispondenza ad un insieme finito, o comunque discreto, di sezioni $y = \text{cost.}$, le costanti $c_i$ potranno diventare le *costanti caratteristiche di un gruppo speciale di $p$ punti.* In corrispondenza ad ogni tal sezione le equazioni (22) son soddisfatte da almeno $\infty^1$ gruppi di $p$ punti appartenenti ad una $g_p$ completa di dimensione $\geq 1$; e perciò il gruppo dei $p$ punti di C apparisce *a priori* indeterminato. Questa indeterminazione sparisce senz'altro, allorchè si considera la C' in luogo della C.

È chiaro che C risulterà algebrica insieme a C'; sicchè noi potremo studiare le condizioni di algebricità di C'.

La $M_{p+1}$ può supporsi immersa in uno spazio lineare $S_r$ $(r \geq p+2)$: una qualunque, $\xi$, delle coordinate del punto X variabile su C', risulta funzione uniforme di $y$; e si tratterà di cercare le condizioni perchè $\xi(y)$ sia algebrica, cioè razionale. La $\xi(y)$ (che è una funzione razionale delle funzioni intere simmetriche delle coordinate dei $p$ punti $x_1, \ldots, x_p$), risulta una funzione abeliana, appartenente al corpo $\Omega$, dei parametri $c_1, \ldots, c_p$. Essa pertanto non può che essere olomorfa o presentare al più singolarità polari per ogni valore di $y$ non singolare nè critico (n. prec.).

Esaminiamo che cosa accade in corrispondenza ad un valore singolare $y = b$, premettendo che, per una conveniente scelta degl'integrali $u_i$ (definiti sempre come al n. 6) esso può supporsi distinto dai valori critici (n. 5). Anzitutto occorrerà chiarire come deve definirsi la varietà $N_p$ sulla sezione $f(x, b, z) = 0$, perchè questa sezione ha il genere $p-1$, avendo acquistato il punto doppio $a(a, b, c)$.

Il limite della varietà dei gruppi di $p$ punti della $f(x, y, z) = 0$, quando $y$ tende a $b$, è la varietà dei gruppi di $p$ punti di $f(x, b, z) = 0$. E un gruppo speciale della sezione variabile ha per limite un gruppo della $f(x, b, z) = 0$, il quale giace sopra una curva d'ordine $m-3$ passante pei $d$ nodi di $f(x, b, z) = 0$, che son limiti dei nodi di $f(x, y, z) = 0$ variabili sulla linea doppia di F e non pel nuovo nodo $a$ (*curva virtualmente aggiunta*, rispetto a quei $d$ nodi) (1). Orbene su $f(x, b, z) = 0$ la $N_p$ è la varietà i cui punti rappresentanc le serie $g_p$ *virtualmente complete* rispetto a quei $d$ nodi assegnati (2).

(1) Ved. le mie *Vorlesungen über algebraische Geometrie* (Leipzig, Teubner, 1921), pag. 349.

(2) Ibidem, pag. 350. Sopra una curva con un certo numero dei suoi nodi assegnati (considerandosi gli altri virtualmente inesistenti) si può costruire una teoria degli integrali abeliani, che presenta varie analogie coll'ordinaria teoria. Avrò occasione di occuparmene altra volta e di mostrare come quella teoria si riattacchi alle proprietà delle funzioni abeliane degeneri. Qui mi basterà di enunciare, pel seguito, la seguente estensione del teorema d'inversione di Jacobi: Sia $f(x, y) = 0$ una curva algebrica irriducibile, d'ordine $m$ e genere effettivo $\pi$, dotata di $d + \varepsilon$ nodi, dei quali $\varepsilon \geq 1$ si considerino inesistenti, sicchè $f$ risulti di genere virtuale $p = \pi + \varepsilon$; e sieno $\varphi_1 = 0, \ldots, \varphi_p = 0$ $p$ curve indipendenti, d'ordine $m-3$, virtualmente aggiunte, rispetto ai $d$ nodi assegnati. Consideriamo gl'integrali abeliani di 3ª (ed in particolare di 1ª) specie $u_i = \int \frac{\varphi_i}{f'_y} dx$,

L'estensione del teorema d'inversione enunciata nella nota a pie' di pagina, tenendo presente che gl'integrali $u_i$ sono indipendenti anche per $y=b$ ($b$ non è un valor critico), permette senz'altro di concludere che anche sul piano $y=b$ la curva C ha un gruppo ben determinato di $p$ punti e che quindi, se $\xi(y)$ è finita per $y=b$, essa è olomorfa.

Esaminiamo il caso in cui $\xi(y)$ diventa infinita per $y=b$. Essendo essa eguale ad un quoziente del tipo $\frac{\eta}{\zeta}$, ove $\eta$, $\zeta$ son funzioni intere delle funzioni simmetriche elementari dei $p$ punti $x_1, \dots, x_p$, finchè il gruppo dei $p$ punti è determinato, la $\xi$ non può diventare infinita che quando $\zeta$ si annulla o quando $\eta$ diviene infinita (per il che occorre che qualcuno dei punti $x_1, \dots, x_p$ divenga improprio). In ambedue i casi la funzione $\frac{\zeta}{\eta}$, *che è continua e uniforme* nell'intorno di $y=b$, si annulla ivi. Ciò significa che $\frac{1}{\xi}$ è olomorfa in $y=b$ e quindi che $\xi$ è meromorfa ivi.

I soli valori che dobbiamo ancora esaminare sono i valori critici. In corrispondenza ad uno $y=\alpha$ (o eventualmente $y=\infty$) di essi, gl'integrali $u_{q+1}, \dots, u_p$ divengono dipendenti, sicchè sulla corrispondente sezione $f(x, \alpha, z)=0$ le equazioni (22) non definiscono un gruppo determinato di $p$ punti. Ma c'è di più. Poichè fra i valori critici ce n'è sempre uno in corrispondenza al quale gl'integrali $u_{q+1}, \dots, u_p$ si annullano identicamente (n. 6), se le costanti $c_{q+1}, \dots, c_p$ furono assunte non tutte nulle, in corrispondenza a questo valore critico si presenta una vera e propria discontinuità, giacchè le ultime $p-q$ somme (22) passano bruscamente da valori costanti non tutti nulli a valori nulli! Dunque:

*La condizione necessaria affinchè la curva analitica* C *sia algebrica è che per le costanti $c_{q+1}, \dots, c_p$ si assumano valori tutti nulli. Proveremo ora che tale condizione è anche sufficiente,* e ne trarremo le conseguenze preannunciate.

Invero, se $y=\alpha$ è un valore critico, agl'integrali $u_1, \dots, u_q, u_{q+1}, \dots, u_p$ si possono sostituire gl'integrali analoghi $u_1, \dots, u_q, u'_{q+1}, \dots, u'_p$, in guisa che $y=\alpha$ non sia più critico rispetto al nuovo sistema d'integrali (n. 5). Però il determinante A della sostituzione lineare a coefficienti razionali in $y$

$$u'_{q+i} = \sum_{j=1}^{p-q} a_{ij}\, u_{q+j}, \qquad (i=1, \dots, p-q),$$

---

e, scelta una comune origine delle integrazioni, si scrivano le equazioni $u_i(x_1)+\dots+ u_i(x_p) \equiv c_i$ (modd. periodi ciclici e polari), ove $x_1, \dots, x_p$ sieno $p$ punti variabili sulla $f$ e $c_i$ costanti. Le suddette equazioni, per valori generici delle $c_i$, son soddisfatte da un sol gruppo di $p$ punti. Un'indeterminazione è possibile soltanto quando le $c_i$ sieno le costanti caratteristiche di un gruppo virtualmente speciale.

che lega $u'_{q+1}, \dots, u'_p$ agl'integrali $u_{q+1}, \dots, u_p$, diventa infinito per $y=\alpha$, e il determinante $\frac{1}{A}$ della sostituzione lineare inversa

$$u_{q+i} = \Sigma A_{ji} u'_{q+j},$$

si annulla per $y=\alpha$.

Indicata con $c'_{q+j}$ la somma dei valori di $u'_{q+j}$ nei $p$ punti $x_1, x_2, \dots, x_p$, ove i cammini d'integrazione sieno i medesimi lungo cui si calcolavano gli integrali $u_i$, si hanno le relazioni:

$$c'_{q+i} = \Sigma a_{ij} c_{q+j} \quad , \quad c_{q+i} = \Sigma A_{ji} c'_{q+j}$$

valide in tutto l'intorno di $y=\alpha$, salvo, eventualmente, in $y=\alpha$. Ma, se le $c_{q+1}, \dots, c_p$ son tutte nulle, le precedenti relazioni ci dicono che le $c'_{q+1}, \dots, c'_p$ sono pure tutte nulle, qualunque sia $y$; e viceversa, se sono nulle queste, risultano nulle quelle. Ciò significa che i $p$ punti soddisfacenti alle $p$ equazioni:

$$(23) \quad \begin{cases} u_i(x_1) + \cdots + u_i(x_p) \equiv c_i, & (i=1, \dots, q), \\ u_{q+j}(x_1) + \cdots + u_{q+j}(x_p) \equiv 0, & (j=1, \dots, p-q), \end{cases}$$

coincidono per ogni $y$ coi $p$ punti soddisfacenti alle equazioni:

$$\begin{array}{ll} u_i(x_1) + \cdots + u_i(x_p) \equiv c_i, & (i=1, \dots, q), \\ u'_{q+j}(x_1) + \cdots + u'_{q+j}(x_p) \equiv 0, & (j=1, \dots, p-q), \end{array}$$

e quindi la curva definita da queste ultime, al variare di $y$, coincide con quella definita dalle prime.

La curva C′, imagine di C sulla varietà $M_{p+1}$ (n. 8), può pertanto definirsi pure mediante le funzioni abeliane corrispondenti ai periodi degli integrali $u_1, \dots, u_q, u'_{q+1}, \dots, u'_p$; e poichè per questi integrali $y=\alpha$ non è critico (nè singolare), così una qualunque $\xi$ delle coordinate del punto X variabile su C′ risulta funzione olomorfa o meromorfa di $y$, anche per $y=\alpha$.

In conclusione $\xi$ possiede in tutto il campo di variabilità di $y$ sole singolarità polari, epperciò è una funzione razionale; e la curva C′, cioè C, risulta algebrica; c. d. d.

Osservazione 1ª. — Poichè le $p$ costanti, con cui si definisce la curva C, non sono tutte arbitrarie (le prime $q$ soltanto lo sono), così può darsi che per ogni sezione $f(x, y, z)=0$ un gruppo generico di valori $(c_1, \dots, c_q, 0, \dots, 0)$ delle solite $p$ somme, corrisponda ad un gruppo speciale di $p$ punti. In tal caso le (23) non definiscono più, neanche per $y$ generico, un gruppo di $p$ punti, ma tutta una serie lineare infinita (completa). Sia $\delta$ la dimensione di questa serie, per $y$ generico. Si potrà allora determinare un intero $\delta'(\geq \delta)$ tale che vi sia un sol gruppo della serie stessa, il quale abbia un punto $\delta'$-plo nel punto base P, del fascio $y = \text{cost.}$, sopra fissato. Detti $x_1, x_2, \ldots, x_{p-\delta'}$, gli ulteriori punti di questo gruppo, poichè in P gl'integrali $u_1, \ldots, u_p$ assumono valori congrui a zero, la somma dei valori assunti da $u_i$ nei punti $x_1, \ldots, x_{p-\delta'}$, sarà eguale alla costante prefissata $c_i$. La curva C si definirà allora, al variare di $y$, come il luogo di questo gruppo di $p - \delta'$ punti. E si potranno per essa ripetere tutte le considerazioni precedenti.

Si noti che dovrà in ogni caso risultare $p - \delta' \geq q$.

Osservazione 2ª. — Se per le costanti $c_1, \ldots, c_q$ si scelgono valori tutti nulli, come per le altre $p - q$ costanti, la curva C definita riducesi al punto P.

Osservazione 3ª. — Le considerazioni svolte in questo num. estendono la validità della proposizione stabilita alla fine del n. 7 anche all'intorno dei valori singolari. E, se nella funzione abeliana di cui si parla in quell'enunciato, si limita la variabilità dei $p$ argomenti, prendendo nulli gli ultimi $p - q$, si ottiene una funzione analitica di $y$ priva di singolarità essenziali.

## Chimica. — *Un nuovo procedimento per vulcanizzare a freddo la gomma elastica* [1]. Nota del Corrisp. G. Bruni.

Oggetto di questa Nota è un nuovo procedimento per vulcanizzare a freddo la gomma elastica, o mescolanze od oggetti di gomma naturale o sintetica di qualsiasi natura, basato su un principio completamente diverso da quelli finora applicati e tale da presentare notevoli vantaggi.

I processi finora usati per la vulcanizzazione a freddo sono sostanzialmente i seguenti:

1°) L'antico processo al cloruro di zolfo, inventato da Parkes nel 1846, consistente nel trattare gli oggetti da vulcanizzare col monocloruro di zolfo, o con soluzioni di questo corpo in solventi, o nell'esporre gli oggetti ai vapori della medesima sostanza. Questo procedimento, assai diffuso nella pratica sopratutto per gli articoli ad immersione e per le riparazioni, ed usato in forme svariate ma sempre chimicamente equivalenti, dà una vulcanizzazione assolutamente superficiale, ciò che costituisce una grave inferiorità di

(1) Lavoro eseguito nel Laboratorio di Ricerche chimiche e chimico-fisiche della Società Pirelli diretto dall'autore.

*N.B.* — Il contenuto della presente Nota fu da me inviato all'Accademia il 14 agosto 1920 in plico suggellato; il medesimo pervenne agli uffici dell'Accademia il 16 agosto, e del deposito fu dato annunzio nel fasc. 9° dei Rendiconti, 2° sem., 1920, a pag. 303.
G. B.