ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

ANNO CCCXVIII.

1921

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXX.

1° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1921

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta dell' 8 maggio 1921.

F. D'OVIDIO, Presidente.

MEMORIE E NOTE DI SOCI

Fisica terrestre — *Sulla profondità dei ghiacciai.* Nota I del Socio CARLO SOMIGLIANA [1].

Per la valutazione della massa di un ghiacciaio è necessario conoscerne lo spessore; il quale può essere determinato direttamente mediante trapanazioni, come qualche volta fu fatto. Ma operazioni di questo genere sono così laboriose e, specialmente ora, costose che possono considerarsi come praticamente ineffettuabili, in particolar modo nella misura che sarebbe indispensabile per un rilievo completo del fondo.

Si è quindi pensato se non fosse possibile arrivare alla conoscenza dello spessore, o della profondità, di un ghiacciaio indirettamente, mediante qualche altro elemento più accessibile alle misure. Si è trovato questo elemento nella velocità superficiale. I varî strati di ghiaccio scorrono, per effetto della gravità, gli uni sopra gli altri, in modo che le velocità relative si sommano ed all'ingrosso può dirsi che la velocità risulta così massima in superficie, minima al fondo. Non si può però ammettere, come fa il signor W. Werenskiold [2], che la velocità superficiale in un punto dipenda esclusivamente dalla profondità in quel punto, cosicchè questi due elementi si possano senz'altro dedurre l'uno dall'altro.

[1] Presentata nella seduta del 3 aprile 1921.

[2] W. Werenskiold, *Die Tiefe eines Gletscher*, Zeitschrift für Gletscherkunde, Bd. IX, 1915.

La quistione va posta in modo più largo, cercando di collegare la velocità superficiale di tutti i punti di una sezione del ghiacciaio, colla curva del profilo della sezione.

È questo il problema che, per la prima volta, porremo e che è suscettibile di una soluzione perfetta e assai semplice. Cosicchè — almeno nei limiti di validità della nostra teoria — *è possibile un vero rilievo del profilo di una sezione di un ghiacciaio mediante la conoscenza esclusiva della velocità superficiale dei punti della sezione stessa.*

I.

Le equazioni del moto.

Un tale risultato presuppone naturalmente una teoria del moto di un ghiacciaio. Noi adotteremo l'ipotesi, ormai generalmente accettata, di considerare il moto del ghiacciaio come quello di un fluido vischioso pesante,

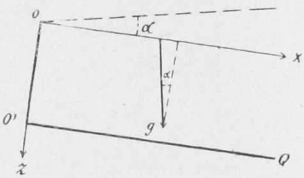

Fig. 1.

la cui compressibilità è trascurabile. Supporremo che il moto avvenga in un canale cilindrico di sezione qualsiasi; la superficie libera del ghiaccio supporremo piana e con inclinazione uguale a quella del canale.

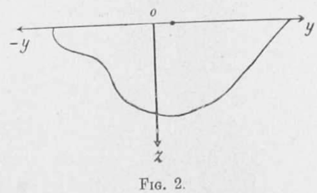

Fig. 2.

Scegliamo per origine un punto della superficie libera, per asse delle x una parallela alla direzione del canale, per asse delle y una normale che determinerà la sezione che vogliamo considerare. Sia α l'angolo d'inclinazione del canale sull'orizzonte; l'asse delle z avrà parimenti un'inclinazione α sulla verticale (fig. 1). La linea del fondo sarà una parallela ad Ox, indicata da $O'Q$. La sezione sarà una curva del piano yz, limitata superiormente da una porzione dell'asse delle y (fig. 2).

Indichiamo con u, v, w le componenti della velocità in un punto (x, y, z) ed osserviamo che nel movimento di un ghiacciaio le accelerazioni sono di un ordine di grandezza trascurabile rispetto alle velocità.

Supposto inoltre il movimento stazionario, le equazioni del moto sono [1]

$$\frac{\partial p}{\partial x} - \mu \Delta_2 u = X \qquad \frac{\partial p}{\partial y} - \mu \Delta_2 v = Y \qquad \frac{\partial p}{\partial z} - \mu \Delta_2 w = Z$$

ove X, Y, Z sono le componenti delle forze unitarie di massa, p la pressione idrostatica, μ il coefficiente di attrito. Per l'incompressibilità poi dovrà essere

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 .$$

Se g è l'accelerazione di gravità, ϱ la densità del ghiaccio, nel nostro caso avremo

$$X = \varrho g \operatorname{sen} \alpha \qquad Y = 0 \qquad Z = \varrho g \cos \alpha .$$

È naturale poi di supporre nulla la componente trasversale della velocità, cioè $v = 0$. Avremo così

$$(1) \qquad \begin{gathered} \frac{\partial p}{\partial x} - \mu \Delta_2 u = \varrho g \operatorname{sen} \alpha \qquad \frac{\partial p}{\partial z} - \mu \Delta_2 w = \varrho g \cos \alpha \\ \frac{\partial p}{\partial y} = 0 \qquad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 . \end{gathered}$$

Dovendo limitare le nostre considerazioni ad una porzione assai breve del canale, le variazioni del moto nella direzione del canale saranno assai piccole, e potremo quindi supporre

$$(2) \qquad \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \qquad \frac{\partial w}{\partial x} = 0 ,$$

Per l'ultima delle (1) dovrà essere anche $\frac{\partial w}{\partial z} = 0$; ed avremo così

$$(3) \qquad u = u(y, z) \qquad w = w(y) .$$

Dalle (1) risulta allora che p deve essere lineare rispetto ad x ed a z; cioè

$$(4) \qquad p = Ax + Bz + C$$

con A, B, C costanti. Le equazioni (1) si riducono allora alle due equazioni

$$\mu \Delta_2 u = A - \varrho g \operatorname{sen} \alpha \qquad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \frac{1}{\mu} (B - \varrho g \cos \alpha) .$$

[1] V. Kirchhoff, *Meccanica*, Lez. XXVI, § 3.

Consideriamo ora le equazioni che devono essere soddisfatte alla superficie. Dalle formole generali per le componenti di tensione (v. Kirchhoff, loc. cit.) si ha nel nostro caso

$$X_x = Y_y = Z_z = p$$

$$Y_z = -\mu \frac{\partial w}{\partial y} \qquad Z_x = -\mu \frac{\partial u}{\partial z} \qquad X_y = -\mu \frac{\partial u}{\partial y}\,.$$

Se n è la normale interna al contorno della sezione, si ha su questo contorno $\cos(nx) = 0$ e quindi per le componenti della pressione superficiale P

$$X_n = -\mu\left(\frac{\partial u}{\partial y}\cos(ny) + \frac{\partial u}{\partial z}\cos(nz)\right) = -\mu\frac{\partial u}{\partial n}$$

$$Y_n = p\cos(ny) - \mu\frac{\partial w}{\partial y}\cos(nz)$$

$$Z_n = p\cos(nz) - \mu\frac{\partial w}{\partial y}\cos(ny)\,.$$

Se P_n è la componente di P secondo la normale, si ha

$$P_n = p - 2\mu\frac{\partial w}{\partial y}\cos(ny)\cos(nz)$$

e se S è il vettore-spostamento superficiale, si deve avere vettorialmente, indicando ν il coefficiente d'attrito superficiale,

$$\mathrm{P} - \mathrm{P}_n = -\nu\,\mathrm{S}$$

ossia

$$X_n - P_n\cos(nx) = -\nu u$$
$$Y_n - P_n\cos(ny) = -\nu v$$
$$Z_n - P_n\cos(nz) = -\nu w\,.$$

Queste equazioni nel caso nostro divengono

$$\mu\frac{\partial u}{\partial n} = \nu u \quad , \quad (1 - 2\cos^2(ny))\frac{\partial w}{\partial y} = 0$$

$$\mu\cos(ny)\,(1 - 2\cos^2(nz))\,\frac{\partial w}{\partial y} = \nu w\,.$$

Alle ultime due non si può soddisfare che supponendo $\frac{\partial w}{\partial y} = 0$ e quindi $w = 0$ in tutto il campo. Dalle (1) segue allora

$$\frac{\partial p}{\partial z} = \varrho g\cos\alpha = \mathrm{B}$$

e resta l'unica equazione al contorno

$$\frac{\partial u}{\partial n} = \nu u$$

la quale, per la superficie libera, vale a dire sull'asse delle y, poichè ivi l'attrito coll'ambiente esterno si può supporre nullo, diviene

$$\frac{\partial u}{\partial n} = 0 \qquad \text{per } z = 0 .$$

Sulla rimanente parte del contorno, se ν fosse grandissimo, si avrebbe

$$u = 0 .$$

Ora effettivamente per quanto risulta dalle osservazioni la velocità di moto a contatto col terreno risulta estremamente piccola, almeno nei casi di non eccessiva inclinazione. Il prof. Mercanton calcola pel ghiacciaio del Rodano uno spostamento annuo sul fondo di poco più di 4 metri all'anno, vale a dire poco più di un centimetro al giorno (¹). Possiamo pertanto ritenere trascurabili, o almeno dello stesso ordine di grandezza degli errori di osservazione, questi spostamenti rispetto a quelli superficiali, che possono raggiungere anche 50 centimetri al giorno, nei nostri ghiacciai. Volendo tenerne conto si potrebbe aggiungere alla componente u una costante, supponendo il moto uguale lungo tutto il profilo della sezione. I risultati finali però subirebbero modificazioni insensibili.

Noi possiamo anche supporre che la pressione varii pochissimo nella direzione del movimento, almeno in prossimità della sezione che dobbiamo considerare e quindi si abbia nella (4) $A = 0$. La pressione si riduce alla pressione idrostatica dovuta alla gravità

$$p = z \varrho g \cos \alpha + p_0$$

ove p_0 indica la pressione atmosferica. *Delle equazioni del moto resta quindi soltanto la prima*

$$\mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) + \varrho g \operatorname{sen} \alpha = 0 \tag{5}$$

mentre le equazioni al contorno sono

$$\begin{array}{lll} & \textit{per } z = 0 & \dfrac{\partial u}{\partial z} = 0 \\ (6) & & \\ & \textit{sul fondo} & u = 0 . \end{array}$$

(¹) Commission des Glaciers de la Société Helvétique des Sciences Naturelles. *Mensuration au Glacier du Rhône 1874-1915.* § 11, pag. 169.

Sono queste le equazioni sulle quali in ultima analisi dobbiamo basare le nostre considerazioni.

La equazione (5) non differisce dall'equazione che determina il movimento di un fluido vischioso pesante in tubo capillare inclinato. Questo risultato, che può sembrare a prima vista paradossale, è giustificato dal fatto che la velocità del ghiacciaio è sempre inferiore alla *velocità critica*, oltre la quale avvengono quei modi turbolenti, che rendono inapplicabile la teoria del movimento continuo dei fluidi [1].

Matematica. — *Sulla teoria degl'integrali semplici di 1ª specie appartenenti ad una superficie algebrica.* Nota V del Corrispondente Francesco Severi.

9. Al variare delle costanti $c_1, \ldots, c_q$ la curva C, costruita nella nota IV [2], varia in un sistema continuo $\{C\}$. La generica curva di questo sistema, in quanto si assegnino colla loro molteplicità effettiva i suoi punti multipli, che eventualmente coincidano coi punti base del fascio $y = \text{cost.}$, definisce un sistema lineare $\infty^0|C|$. E invero, per valori generici delle $c_1, \ldots, c_q$ il gruppo dei p (o dei $p - \delta'$) punti mediante cui fu definita C, *non* sta in una serie lineare infinita d'ordine p (o $p - \delta'$). Il sistema continuo $\{C\}$ consta pertanto di ∞^q sistemi lineari distinti (il generico di questi sistemi essendo ∞^0).

D'altronde, come risulta immediatamente dal concetto di serie caratteristica di un sistema continuo (Severi, Atti R. Acc. Scienze Torino, 1904), ogni tal sistema di curve tracciate su F, non può constare di più che ∞^q sistemi lineari distinti; dunque « ogni sistema continuo completo di curve algebriche tracciate su F non può contenere più che ∞^q sistemi lineari distinti, e vi sono su F sistemi continui per cui il massimo è raggiunto ». Donde poi si deduce agevolmente (Severi, Atti Ist. Veneto, 1906) che « su F ogni sistema lineare, irriducibile o no, di caratteri virtuali (grado e genere) n, π e d'indice di specialità i, per cui sia $n - \pi + p_a + 1 - i \geq 0$, appartiene ad una serie ∞^q di sistemi lineari distinti; ed anzi ogni siffatta serie, come totalità di sistemi lineari, è *individuata* da una qualunque delle sue curve »; ecc. ecc.

Tenendo infine conto del teorema di Castelnuovo, circa il massimo della deficienza della serie caratteristica di un sistema lineare di curve tracciate su F, ne segue senz'altro che:

[1] V. Boris Weinberg, *Ueber den Koefficienten der inneren Reibung des Gletschereises und seine Bedeutung für die Theorie der Gletscherbewegung.* Zeitschrift für Gletscherkunde, I Bd., 1906.

[2] Questi Rendiconti, pag. 276.