ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA NAZIONALE

DEI LINCEI

ANNO CCCXVIII.

1921

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXX.

1° Semestre.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1921

Sono queste le equazioni sulle quali in ultima analisi dobbiamo basare le nostre considerazioni.

La equazione (5) non differisce dall'equazione che determina il movimento di un fluido vischioso pesante in tubo capillare inclinato. Questo risultato, che può sembrare a prima vista paradossale, è giustificato dal fatto che la velocità del ghiacciaio è sempre inferiore alla *velocità critica*, oltre la quale avvengono quei modi turbolenti, che rendono inapplicabile la teoria del movimento continuo dei fluidi [1].

Matematica. — *Sulla teoria degl'integrali semplici di 1ª specie appartenenti ad una superficie algebrica.* Nota V del Corrispondente FRANCESCO SEVERI.

9. Al variare delle costanti $c_1, \dots, c_q$ la curva C, costruita nella nota IV [2], varia in un sistema continuo $\{C\}$. La generica curva di questo sistema, in quanto si assegnino colla loro molteplicità effettiva i suoi punti multipli, che eventualmente coincidano coi punti base del fascio $y = \text{cost.}$, definisce un sistema lineare $\infty^0 |C|$. E invero, per valori generici delle $c_1, \dots, c_q$ il gruppo dei p (o dei $p - \delta'$) punti mediante cui fu definita C, *non* sta in una serie lineare infinita d'ordine p (o $p - \delta'$). Il sistema continuo $\{C\}$ consta pertanto di ∞^q sistemi lineari distinti (il generico di questi sistemi essendo ∞^0).

D'altronde, come risulta immediatamente dal concetto di serie caratteristica di un sistema continuo (Severi, Atti R. Acc. Scienze Torino, 1904), ogni tal sistema di curve tracciate su F, non può constare di più che ∞^q sistemi lineari distinti; dunque « ogni sistema continuo completo di curve algebriche tracciate su F non può contenere più che ∞^q sistemi lineari distinti, e vi sono su F sistemi continui per cui il massimo è raggiunto ». Donde poi si deduce agevolmente (Severi, Atti Ist. Veneto, 1906) che « su F ogni sistema lineare, irriducibile o no, di caratteri virtuali (grado e genere) n, π e d'indice di specialità i, per cui sia $n - \pi + p_a + 1 - i \geq 0$, appartiene ad una serie ∞^q di sistemi lineari distinti; ed anzi ogni siffatta serie, come totalità di sistemi lineari, è *individuata* da una qualunque delle sue curve »; ecc. ecc.

Tenendo infine conto del teorema di Castelnuovo, circa il massimo della deficienza della serie caratteristica di un sistema lineare di curve tracciate su F, ne segue senz'altro che:

[1] V. Boris Weinberg, *Ueber den Koefficienten der inneren Reibung des Gletschereises und seine Bedeutung für die Theorie der Gletscherbewegung*. Zeitschrift für Gletscherkunde, I Bd., 1906.

[2] Questi Rendiconti, pag. 276.

Un sistema continuo completo, tracciato su F, *la cui curva generica sia irriducibile e soddisfaccia coi suoi caratteri* n, π, i *alla diseguaglianza* $n - \pi + p_a + 1 - i \geq 0$, *ha la serie caratteristica completa.*

È questo, come si sa, un importante teorema dovuto ad Enriques, il quale lo ha dato direttamente, prescindendo dalla diseguaglianza supposta sopra [1].

Dal teorema ultimamente enunciato si deduce, come facemmo per vie diverse, Castelnuovo ed io, che il numero degli integrali semplici di 1ª specie di F non è inferiore a q, donde poi, combinando coi risultati ch'io aveva in precedenza conseguiti, traemmo la conclusione che *il numero degl'integrali semplici di 1ª specie appartenenti ad* F *è* q *e che* $2q$ *è il numero*

[1] A tale diseguaglianza si può sostituire l'ipotesi che il sistema continuo $\{C\}$ consti di ∞^q sistemi lineari. Col nostro procedimento la validità del teorema concernente la completezza della serie caratteristica d'un sistema completo resta pertanto dubbia solo nel caso in cui $\{C\}$ consti di $\infty^{q'}$ sistemi lineari $(0 \leq q' < q)$. Sistemi continui siffatti possono esistere (per $q' > 0$) soltanto quando F possegga sistemi regolari d'integrali riducibili; il che non accade in generale. Questo ho creduto opportuno d'avvertire innanzi d'accennare ad un punto del procedimento geometrico con cui si dimostra la completezza della serie caratteristica, che abbisogna di qualche ulteriore indagine, la quale potrà eventualmente portare a limitazioni inessenziali, lasciando però integra la sostanza del fatto. A un certo punto del ricordato procedimento si ha da considerare, sopra un piano α, un sistema continuo completo Σ di curve C, d'ordine m, la cui generica C_0 è dotata di d nodi $P_i (i = 1, \dots, d)$ e tocca in λ punti $Q_j (j = 1, \dots, \lambda)$ una curva (irriducibile) K. Ogni curva di Σ infinitamente vicina a C_0 passa per P_i, Q_j e *viceversa* — si dice — ogni curva d'ordine m, infinitamente vicina a C_0, passante per P_i, Q_j, ha d nodi infinitamente vicini a quelli di C_0 e λ contatti con K infinitamente vicini ai Q_j. Ora il « viceversa » non è senz'altro lecito. Prendiamo infatti le curve d'ordine m di α come « punti » di un S_N lineare $\left(N = \frac{m(m+3)}{2}\right)$. Le ∞^{N-1} curve prossime a C_0, che hanno un nodo prossimo a P_i, formano allora una « falda lineare » F_i di S_N (ved. le mie citate *Vorlesungen*, pag. 314). Similmente si ha una falda lineare Φ_j costituita dalle ∞^{N-1} curve prossime a C_0 e tangenti a K in un punto dell'intorno di Q_j. L'iperpiano H_i (o I_j) tangente ad F_i (o Φ_j) nel « punto origine » C_0, è l'imagine delle ∞^{N-1} curve d'ordine m che passano per P_i (o per Q_j). Le curve d'ordine m, prossime a C_0, dotate di d nodi e λ-tangenti a K (che son poi tutte le curve di Σ prossime a C_0) son quelle comuni alle $d + \lambda$ falde F_i, Φ_j. Esse costituiscono una falda V, di origine C_0, che è pure lineare, perchè C_0, come punto generico di Σ, è semplice. Lo spazio lineare tangente a V — cioè a Σ — in C_0 è contenuto nello spazio H comune ai suddetti $d + \lambda$ iperpiani; ma — *ed è qui il punto essenziale* — non è detto che i due spazi coincidano. Non può insomma escludersi che la dimensione di Σ sia inferiore a quella del sistema lineare H delle aggiunte d'ordine m a C_0, passanti pei λ punti Q_j. Se Σ è di dimensione inferiore a quella di H, la serie caratteristica di Σ non è completa. Nè ad escluder ciò giova avvertire che C_0 è un punto semplice di Σ, perchè le $d + \lambda$ falde F_i, Φ_j potrebbero benissimo toccarsi lungo tutta la V, senza che C_0 cessasse d'esser semplice. Quel che si può affermare è che la dimensione di Σ eguaglia certo quella di H, quando i λ punti Q_j impongono condizioni indipendenti alle aggiunte d'ordine m a C_0; cioè quando la serie caratteristica di Σ è non speciale.

degl'integrali semplici di 2ª specie ed il numero dei periodi degli uni e degli altri.

10. Passerò ora a considerare i legami fra la teoria degl'integrali semplici di 1ª specie, i criterî di equivalenza per le curve tracciate sulla superficie F e la teoria della base relativa alla totalità di queste curve.

Richiamo anzitutto la forma più utile di quel teorema che ho dato altra volta sotto il nome di *teorema d'Abel sulle superficie* (Annali di Mat., 1905):

« La condizione necessaria e sufficiente affinchè un sistema continuo di « curve algebriche C, tracciate sulla superficie F, sia contenuto totalmente « in un sistema lineare, è che la somma dei valori di ogni integrale sem- « plice di 1ª specie di F, nei punti comuni a C e ad una curva irriduci- « bile A, fissata entro un fascio lineare, resti costante al variare con- « tinuo di C ».

In particolare come curva A può assumersi la sezione della superficie F $[f(x, y, z) = 0]$ con un generico piano $y = \text{cost}$.

La ragione intima del fatto che basta la costanza delle somme fornite nel gruppo variabile (C, A) dagl'integrali semplici di 1ª specie di F, per affermare la variabilità di C in un sistema lineare, è questa: che le somme dei p integrali abeliani di 1ª specie appartenenti ad A, nei punti del gruppo (C, A), riduconsi a q linearmente indipendenti. Ciò è stato già notato da Castelnuovo, profittando del fatto che quelle p somme son integrali semplici di 1ª specie delle varietà di Picard annessa ad F.

Gioverà precisare maggiormente questo fatto, provando che di quelle p somme le $p - q$ inerenti agl'integrali abeliani di 1ª specie individuati su A delle curve del sistema aggiunto $|A'|$, son costanti (mentre le q somme date dagl'integrali di 1ª specie di F sono in generale indipendenti fra di loro). A questo scopo poniamo in modo generico:

$$u = \int \frac{\varphi(x, y, z)}{f'_z} dx, \tag{24}$$

ove $\varphi = 0$ sia una superficie d'ordine $m - 2$ aggiunta ad F e passante per la retta impropria r dei piani $y = \text{cost.}$; e indichiamo con $x_1(x_1, y, z_1)$, ..., $x_n(x_n, y, z_n)$ gli n punti d'incontro di una curva C d'ordine n, tracciata su F, col piano $y = \text{cost}$.

Fissiamo inoltre, per un determinato valor iniziale y_0 di y, cui corrispondano i punti $x_1^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}$ di C, i *cammini d'integrazione iniziali* $\sigma_1^{(0)}, \dots, \sigma_n^{(0)}$ lungo cui si calcolano i valori $u(x_1^{(0)}), \dots, u(x_n^{(0)})$ dell'integrale u, a partire da un'origine comune dei detti cammini, che sceglieremo in uno, P, dei punti base del fascio $y = \text{cost}$.

Variando y, a partire da y_0, variano con continuità i punti di diramazione della riemanniana $f(x, y, z) = 0$ (su cui si distende la funzione z di x, riguardando y come un parametro) e vengono così definiti per continuità, a partire dai cammini iniziali, i cammini d'integrazione $\sigma_1, \dots, \sigma_n$ su ciascuna sezione $y = \text{cost}$. Resterà pertanto definito, per ogni y, il valore della somma $U(y) = u(x_1) + \cdots + u(x_n)$, il quale dipenderà, in generale, oltrechè dai cammini $\sigma^{(0)}$, che si sono scelti come iniziali, anche dal cammino con cui, sul piano ove si distende la variabile complessa y, si va da y_0 al valore considerato di y. *Vediamo in che cosa consista la polidromia della funzione* $U(y)$. È a priori ben chiaro che U aumenta di un periodo di u, quando y circola; ma pel seguito ci occorre d'indagare più davvicino quali sono i valori di y attorno ai quali si produce la polidromia e come questa si produca.

Una circolazione di y, da y_0 ritornando ivi, fa ritornare in sè ogni cammino σ (o meglio lo trasforma in un cammino omologo all'iniziale) semprechè il ciclo descritto da y non contenga nel suo interno nessuno dei valori singolari, come $y = b$. Pertanto, poichè u non diviene mai identicamente infinito, comunque varî y (n. 6), U risulta funzione olomorfa di y nell'intorno di ogni valore non singolare.

In verità, se $y = \beta$ è uno dei piani $y = \text{cost}$. tangenti a C, girando attorno a β si scambiano *due* dei punti $x_1, \dots, x_n$, p. es. x_1, x_2, e si scambiano pure i cammini σ_1, σ_2. Ciò però non produce alcuna alterazione sul valore di U. Infatti, attesa la genericità degli assi coordinati, β si può supporre diverso da un valore singolare e i due punti x_1, x_2, all'inizio della circolazione di y attorno a β, possono ritenersi vicinissimi, sicchè insomma i cammini σ_1, σ_2 risultano omologhi all'inizio e quindi anche alla fine della circolazione, la quale perciò non produce che uno scambio nei primi due termini di U. Dunque U è olomorfa nell'intorno di β.

Resta da esaminare che cosa accade attorno ad un valore singolare $y = b$, relativo al punto di contatto (a, b, c) del piano tangente $y = b$. Sieno ξ_1, ξ_2 i due punti di diramazione della riemanniana $f(x, y, z) = 0$, i quali, col tendere di y a b, tendono a fondersi nel punto (a, b, c) (che diventa un punto di combaciamento di due fogli). Si avvertirà, anzitutto, che i punti ξ_1, ξ_2 connettono i medesimi due fogli della riemanniana $f(x, y, z) = 0$, perchè appunto al limite, sovrapponendosi, devono dar luogo ad un punto doppio di $f(x, b, z) = 0$. Ciò posto, se uno dei cammini d'integrazione, p. es. σ_i, incontra la linea di passaggio $\xi_1 \xi_2$, dopo la circolazione di y attorno a b, esso si muta in un cammino omologo a $\sigma_i + \tau$, ove τ è il ciclo (nullo, sulla riemanniana a 4 dimensioni imagine della superficie F), che circonda la predetta linea di passaggio. Invece i cammini σ che non incontrano tale linea di passaggio si mutano in cammini omologhi, per una circolazione di y attorno a b.

Dunque la variazione di U dipende soltanto degli eventuali cammini incontranti la linea di passaggio $\xi_1 \xi_2$. Comunque, poichè il ciclo τ, sulla riemanniana a 2 dimensioni $f(x, y, z) = 0$, è omologo ad una combinazione lineare a coefficienti interi dei $2p$ cicli fondamentali, così in definitiva, per effetto della circolazione attorno a b, la U si altererà per un periodo $\Sigma m_i \omega_i$ di u, ove $\omega_1, \ldots, \omega_{2p}$ sono i $2p$ periodi fondamentali dell'integrale u. Si avvertirà che *gl'interi m dipendono soltanto dalla scelta dei cammini iniziali* $\sigma^{(0)}$ *e dalla natura della circolazione che si è fatta compiere ad y.*

Osservazione 1ª. — Se l'integrale u possiede un valore critico $y = \alpha$, cosicchè risulti $\varphi \equiv (y - \alpha)\psi$, $\psi = 0$ essendo un'aggiunta d'ordine $m - 3$, per $y = \alpha$ la somma U si annulla identicamente. In particolare ciò accade per $y = \infty$, quando φ, anzichè esser un'aggiunta d'ordine $m - 2$ passante per r, sia un'aggiunta d'ordine $m - 3$.

Osservazione 2ª. — Come abbiamo detto, *la* U *è funzione olomorfa di y attorno ad ogni valore non singolare*. È facile vedere ch'*essa presenta una singolarità di tipo logaritmico in un valore singolare* $y = b$. Invero, perchè in $y = b$ si abbia una singolarità di U occorre (ma neppure basta), che uno almeno dei cammini σ_i, quando si gira attorno a b, si muti in un cammino omologo a $\sigma_i + \tau$. Detto allora $u(x_i)$ il valore di u lungo il cammino σ_i e $\omega_i(y)$ il periodo di u lungo τ, verrà nell'intorno di $y = b$:

$$u(x_i) = \eta_i(y) + \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\,\omega(y)\log(y - b),$$

ove $\eta_i(y)$, $\omega(y)$ son funzioni olomorfe di y attorno ad $y = b$. Se sono λ (λ intero $\leq n$) i cicli σ_i per cui accade questo fatto, nell'intorno di b la funzione U sarà del tipo:

$$\mathrm{U} = \mathrm{H}(y) + \frac{\lambda}{2\pi\sqrt{-1}}\,\omega(y)\log(y - b),$$

in cui $\mathrm{H}(y) = \Sigma\eta_i(y)$ è olomorfa nell'intorno considerato.

Osservazione 3ª. — La funzione U è una di quelle che Poincaré chiama *funzioni normali* r, relative alla curva C.

11. Supponiamo ora che la curva C sia suscettibile di variare con continuità sulla F, e sia $\overline{\mathrm{C}}$ una curva ad essa vicinissima. Per la genericità degli assi, le C, $\overline{\mathrm{C}}$ non contengono alcun punto singolare (punto di contatto di piani $y =$ cost.).

Si potrà sempre supporre che $\overline{\mathrm{C}}$ sia così prossima a C, che indicate con $\overline{x}_1^{(0)}, \ldots, \overline{x}_n^{(0)}$ le intersezioni di $\overline{\mathrm{C}}$ col piano $y = y_0$, cioè colla riemanniana $f(x, y_0, z) = 0$, rispettivamente prossime a $x_1^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}$, il punto $\overline{x}_i^{(0)}$ appartenga, su tale riemanniana, allo stesso foglio cui appartiene $x_i^{(0)}$. Indicheremo inoltre con $\overline{\sigma}_1^{(0)}, \ldots, \overline{\sigma}_n^{(0)}$ i cammini, vicinissimi a $\sigma_1^{(0)}, \ldots, \sigma_n^{(0)}$, che vanno da P ai punti $\overline{x}_1^{(0)}, \ldots, \overline{x}_n^{(0)}$. I cammini $\sigma_i^{(0)}, \overline{\sigma}_i^{(0)}$ saranno omologhi fra di loro.

Facendo variare y a partire da y_0 viene a definirsi, in corrispondenza alla curva $\bar{C}$, la somma $\bar{U}$ analoga ad U. Quando y compie un giro attorno al valor singolare $y = b$, $\bar{U}$, in forza del n. prec., subisce lo stesso aumento $\Sigma m_i \omega_i$ subìto da U, cosicchè la differenza $\bar{U} - U$ resta inalterata. Tale differenza è perciò funzione olomorfa di y in tutto il piano y, ivi compresi i valori singolari ed il valore $y = \infty$. Essa è perciò una costante. E sarà una costante nulla, se l'integrale u possiede un valore critico (n. 10, Oss. 1ª). In particolare questo accadrà quando u provenga da un'aggiunta di ordine $m - 3$. Possiamo concludendo enunciare:

Se C *è una curva suscettibile di variare con continuità sulla superficie* F *e* φ *è un'aggiunta d'ordine* $m - 2$ *ad* F, *passante per la retta impropria dei piani* $y = cost.$, *la somma* U *dei valori assunti dall'integrale* (24) *nei punti ove* C *sega il piano variabile* $y = cost.$, *considerata come funzione del parametro* y, *si altera per una costante additiva tutte le volte che* C *si sposta di poco nel proprio sistema continuo.*

Se φ è un'aggiunta d'ordine $m - 3$ ad F, la variazione di U per un piccolo spostamento di C, è addirittura nulla; *e ciò anche se lo spostamento di* C *non avviene entro un sistema lineare.*

Fisica. — *L'analogo termico dell'effetto Oersted-Ampère.* Nota II del Socio O. M. Corbino [1].

Si è visto nella Nota I sullo stesso argomento che se si attribuisce il trasporto dell'elettricità e del calore nei metalli al movimento dei soli elettroni negativi si dovrebbe poter constatare con un disco percorso da un flusso calorifico radiale e disposto normalmente a un campo magnetico, una azione di trascinamento analoga a quella manifestata dalla ruota di Barlow. Invece la teoria di Drude che spiega il trasporto del calore e della elettricità col contemporaneo movimento di ioni dei due segni prevede un'azione meccanica nulla.

Era perciò importante esaminare i risultati dell'esperienza opportunamente condotta; e poichè il fenomeno ricercato sta in relazione con le correnti circolari create per effetto del campo in un disco percorso da un flusso termico radiale, occorreva servirsi di un metallo come il bismuto che manifesta quelle correnti in misura cospicua.

All'esperienza furono date due forme concettualmente equivalenti.

In una prima attuazione, disposto un elettromagnete in modo da creare fra le masse polari un campo verticale, fu sospeso a mezzo di un filo sottile

[1] Presentata nella seduta del 7 novembre 1920.