ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA NAZIONALE

DEI LINCEI

ANNO CCCXVIII.

1921

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXX.

1° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1921

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA NAZIONALE

DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 3 giugno 1921.

V. VOLTERRA, Vicepresidente.

MEMORIE E NOTE DI SOCI

Fisica terrestre. — *Sulla profondità dei ghiacciai.* Nota II del Socio CARLO SOMIGLIANA.

II.

DETERMINAZIONE DEL PROFILO.

Il problema che noi dobbiamo proporci è quello di dedurre la curva del profilo del canale glaciale, supponendo che siano noti, come dati d'osservazione, i valori della funzione u nella porzione dell'asse delle y che è compresa fra i bordi del canale. Noi supporremo che questa porzione dell'asse delle y sia limitata dai valori $y = L_0$ ed $y = L_1$.

Ora noi possiamo dimostrare che la funzione u è completamente determinata dai suoi valori u_0 sull'asse delle y fra L_0 ed L_1, valori che possiamo supporre espressi mediante una funzione $\varphi(y)$, cioè

$$u_0 = \varphi(y) \tag{7}$$

e dai valori della sua derivata normale lungo lo stesso intervallo, valori che nel nostro caso sono pure noti, in quanto sono tutti nulli per la prima delle condizioni (6). Supponiamo, per maggiore generalità, che si abbia

$$\text{per } z = 0 \qquad \frac{\partial u}{\partial z} = \psi(y). \tag{8}$$

Siccome la u deve essere regolare nel campo da considerarsi, essa nell'intorno di un punto qualunque dell'asse delle y, che possiamo senz'altro supporre sia il punto $y=0$ $z=0$, ammetterà uno sviluppo della forma solita

$$u(y\,,z)=u_0+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_0 y+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_0 z+\cdots$$

Ora si può subito dimostrare che tutti i coefficienti di questo sviluppo si possono determinare mediante le (7) (8) e la equazione (5) a cui la u deve soddisfare. Da queste equazioni abbiamo infatti con semplici derivazioni

$$\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_0=\varphi^{(1)}(y) \qquad \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_0=\psi(y)$$

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)_0=\varphi^{(2)}(y) \qquad \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y\,\partial z}\right)_0=\psi^{(1)}(y) \qquad \left(\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)_0=-\varphi^{(2)}(y)-\mathrm{H}$$

ove gli apici indicano derivazioni, ed H è la costante $\varrho g \operatorname{sen}\alpha:\mu$. In modo analogo si possono calcolare i valori di tutte le altre derivate di ordine superiore, per $z=0$. Si trova

$$\left(\frac{\partial^n u}{\partial y^n}\right)_0=\varphi^{(n)}(y) \qquad \left(\frac{\partial^{(m+2n)} u}{\partial y^m\,\partial z^{2n}}\right)_0=(-1)^n\,\varphi^{(m+2n)}(y)$$

$$\left(\frac{\partial^{(m+2n+1)} u}{\partial y^m\,\partial z^{2n+1}}\right)_0=(-1)^n\,\psi^{(m+2n)}(y)\,.$$

L'unicità della funzione u che soddisfa alle condizioni stabilite è così dimostrata, poichè dallo sviluppo della funzione in un punto del campo, noi possiamo coi metodi di prolungamento delle funzioni armoniche dedurne lo sviluppo in un altro qualunque. La u differisce infatti da una funzione armonica unicamente per il termine $-\frac{1}{2}\mathrm{H}z^2$, che è nullo, insieme alla sua derivata normale, sull'asse delle y.

La funzione $\varphi(y)$ per le ipotesi fatte avrà sempre valori nulli all'estremo dell'intervallo, cioè per $y=\mathrm{L}_0\,,\mathrm{L}_1$. In questi punti è nulla anche la u; perciò la curva rappresentata nel piano yz dall'equazione

$$u(y\,,z)=0$$

darà senz'altro l'equazione del profilo del canale a cagione della seconda delle equazioni (6), tutte le volte che la funzione u, in base ai dati superficiali, si potrà effettivamente costruire.

Ora questa funzione si può sempre costruire colla massima facilità mediante la funzione $\varphi(y)$ e la funzione $\Psi(y)$, quando questa non sia nulla, o non si voglia supporla tale per tener conto di qualche altro elemento.

Se $\psi(y) = 0$ basterà porre, ricordando la forma dell'integrale generale dell'equazione di Laplace con due variabili,

$$u(y, z) = \frac{1}{2} \varphi(y + iz) + \frac{1}{2} \varphi(y - iz) - \frac{1}{2} \mathrm{H} z^2$$

$$\mathrm{H} = \frac{1}{\mu} \varrho g \operatorname{sen} \alpha \qquad i = \sqrt{-1}\,.$$

La derivata rispetto a z di questa espressione si annulla per $z = 0$.

Quando $\psi(y)$ non sia ovunque nulla basterà aggiungere alla espressione precedente la funzione

$$-\frac{i}{2} \Psi(y + iz) + \frac{i}{2} \Psi(y - iz) \quad \text{ove} \quad \Psi(y) = \int^y \psi(y)\, dy$$

che sarà pure reale, essendo, come dobbiamo supporre, $\varphi(y)$ e $\psi(y)$ reali.

L'equazione del profilo della sezione sarà quindi in generale

$$\varphi(y + iz) + \varphi(y - iz) - \frac{z^2}{\mu} \varrho g \operatorname{sen} \alpha = 2 u_f \tag{9}$$

indicando con u_f quella costante, sempre assai piccola che può rappresentare la velocità media di scorrimento del ghiacciaio sul fondo, e che generalmente, come già si disse, può senza errore sensibile supporsi nulla.

Se nelle equazioni precedenti che determinano u sostituiamo all'immaginario i una costante reale a, e supponiamo che la variabile z rappresenti un tempo, esse vengono a coincidere, supponendo $\mathrm{H} = 0$, coll'equazione differenziale della corda vibrante, e cogli integrali classici di D'Alembert per questa equazione. Le funzioni $\varphi(y)$, $\psi(y)$ corrispondono allora a quelle che dànno gli spostamenti e le velocità iniziali dei punti della corda. Questa analogia dà ragione della generalità della soluzione, che abbiamo potuto costruire.

Praticamente la funzione $\varphi(y)$ non sarà altro che una espressione di interpolazione fra una serie discreta di valori per la velocità superficiale, in punti determinati dall'asse delle sezioni, nei quali sarà stata determinata la velocità mediante l'osservazione. Essà avrà ad es. la forma

$$\varphi(y) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(y)\, u_i$$

ove λ_i sono polinomi interi di grado n, determinati dalla formola d'interpolazione di Lagrange, $u_1, u_2, \ldots$ i valori della velocità nei punti di ascissa $y_1, y_2, \ldots, y_n$; cioè sarà

$$\lambda_i(y) = \frac{(y - y_1) \ldots (y - y_{i-1})(y - y_{i+1}) \ldots (y - y_n)}{(y_i - y_2) \ldots (y_i - y_{i-1})(y_i - y_{i+1}) \ldots (y_i - y_n)}\,.$$

Si comprende perciò come aumentando il numero dei punti, nei quali si determina la velocità superficiale, si potrà raggiungere tutta l'approssimazione che si desidera nella rappresentazione della curva che rappresenta tale velocità, e quindi anche di quella che rappresenta il profilo della sezione.

In questo caso la funzione u sarà composta del termine $\frac{1}{2} H z^2$, e di una funzione lineare di un certo numero di armoniche piane $U_1, U_2, \ldots$, di ordine pari rispetto a z, la cui forma generale, come è notissimo, è

$$U_n = \frac{1}{2}(y + iz)^n + \frac{1}{2}(y - iz)^n.$$

La soluzione così trovata del problema della determinazione del profilo della sezione è suscettibile di una generalizzazione, che può avere interesse nei casi in cui la linea libera superficiale si scosta da una linea retta. Effettivamente, se si osservano le sezioni ottenute dai rilievi, questa linea è generalmente convessa verso l'alto nella regione mediana. Volendo tener conto di questa particolarità, immaginiamo di sostituire alla retta dell'asse delle y, una circonferenza col centro in un punto qualunque, opportunamente scelto del piano yz, e prendiamo un sistema di coordinate polari ϱ, θ col polo in questo punto.

La funzione u, considerata come dipendente dalle nuove variabili, soddisferà all'equazione

$$\frac{1}{\varrho}\frac{\partial}{\partial \varrho}\left(\varrho \frac{\partial u}{\partial \varrho}\right) + \frac{1}{\varrho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + H = 0$$

mentre sulla circonferenza superficiale dovrà essere

$$\frac{\partial u}{\partial \varrho} = 0 \quad \text{cioè per} \quad \varrho = R,$$

se R è il raggio di questa circonferenza, ed inoltre

$$u = \varphi(\theta)$$

se $\varphi(\theta)$ è la funzione che dà la velocità superficiale in questo caso. Noi possiamo costruire una funzione v di ϱ, la quale soddisfa all'equazione

$$\Delta_2 v(\varrho) + H = 0$$

ed inoltre sulla circonferenza $\varrho = R$ alle condizioni

$$v(R) = 0 \qquad \left(\frac{\partial v}{\partial \varrho}\right)_R = 0.$$

Basta porre

$$-v(\varrho) = A\varrho^2 + B \lg \varrho + C$$

con

$$A = \frac{1}{4}H \qquad B = -\frac{1}{2}R^2 H \qquad C = -\frac{1}{4}HR^2 + \frac{1}{2}HR^2 \lg R.$$

Questa funzione ha lo stesso ufficio della funzione $\frac{1}{2} z^2 H$ del caso precedente. Se poniamo

$$u = U(\varrho, \theta) + v(\varrho)$$

avremo per U le equazioni

$$\frac{1}{\varrho} \frac{\partial}{\partial \varrho}\left(\varrho \frac{\partial U}{\partial \varrho}\right) + \frac{1}{\varrho^2} \frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2} = 0$$

ed inoltre

$$U(R, \theta) = \varphi(\theta) \qquad \left(\frac{\partial U}{\partial \varrho}\right)_R = 0 .$$

Per considerazioni ben note avremo allora subito per questa nuova funzione l'espressione

$$U(\varrho . \theta) = \frac{1}{2} \varphi\left(\theta + i \lg \frac{\varrho}{R}\right) + \frac{1}{2} \varphi\left(\theta - i \lg \frac{\varrho}{R}\right)$$

ed avremo risoluto il problema della determinazione del profilo del fondo in modo analogo al caso precedente, quando la linea superficiale limitante superiormente la sezione del ghiacciaio sia una circonferenza, prendendo come equazione del profilo:

$$U(\varrho, \theta) + v(\varrho) = 0 .$$

Questi procedimenti pel rilievo del fondo presuppongono naturalmente, per poter essere praticamente applicati, la conoscenza della costante H ossia del rapporto ϱg sen $\alpha : \mu$. Le costanti ϱ, g possono ritenersi note, l'angolo α si potrà pure dedurre con sufficiente approssimazione dai rilievi della superficie del ghiacciaio. L'elemento più incerto è il coefficiente d'attrito μ. Il sig. Weinberg (loc. cit.) ne ha tentato una determinazione diretta sperimentando sul ghiaccio del Hintereisferner ed una teorica indiretta, approfittando dei rilievi fatti sullo stesso ghiacciaio. I risultati ottenuti dànno delle medie concordanti, anzi la loro piccolissima differenza non si può attribuire che ad una accidentalità. Questi valori ad ogni modo sono

$$\mu_{\text{teor.}} = (1,67 \mp 0,95)\, 10^{13} \frac{\text{gr.}}{\text{cm. sec.}}$$

$$\mu_{\text{sper.}} = (1,74 \mp 1,10)\, 10^{13} \frac{\text{gr.}}{\text{cm. sec.}} .$$

Ci occuperemo in seguito della possibilità di calcolare il valore di μ mediante la teoria stessa che abbiamo stabilita, approfittando di alcuni casi, in cui si conosce il rilievo esatto del fondo e la velocità superficiale. È ora interessante di esaminare quale sia la forma analitica ed il significato geometrico dei risultati a cui si giunge nei casi più semplici, ammettendo cioè noti soltanto alcuni elementi della velocità superficiale. Naturalmente per un confronto colle misure di profondità, che necessariamente sono fatte verticalmente, si dovrà tener conto che la direzione delle ordinate z è inclinata di un angolo α sulla verticale.