ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA NAZIONALE

DEI LINCEI

ANNO CCCXVIII.

1921

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXX.

1° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1921

Matematica. — *Sulla teoria degl'integrali semplici di 1ª specie appartenenti ad una superficie algebrica.* Nota VI del Corrispondente FRANCESCO SEVERI.

12. Quando la curva $\bar{C}$, considerata alla fine della Nota V [1], sia una curva qualunque del sistema continuo Σ cui appartiene C, e non più una curva vicinissima, la somma $\bar{U}$ relativa a $\bar{C}$ risulterà perfettamente definita, a partire dalla somma U relativa a C, tutte le volte che, entro Σ, sia fissato il cammino ∞^1 con cui si va da C a $\bar{C}$. Invero, i cammini d'integrazione per andare da P ai punti $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n$ ove $\bar{C}$ sega un piano $y = \text{cost.}$, si otterranno aggiungendo ai cammini $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$ quelli descritti dai punti $x_1, \ldots, x_n$ di C quando C va dalla posizione iniziale a $\bar{C}$, seguendo, entro Σ, l'assegnato cammino ∞^1. Ma l'incremento costante subìto da U nel passaggio da C a $\bar{C}$ dipenderà generalmente dal cammino ∞^1 scelto entro Σ. La differenza fra due qualunque di questi incrementi sarà però un periodo di u. Sicchè possiamo dire che:

Se C, $\bar{C}$ *son due curve appartenenti su* F *al medesimo sistema continuo, le somme* U, $\bar{U}$ *dei valori assunti dall'integrale* (24) *nei punti ove* C, $\bar{C}$ *segano un piano* $y = \text{cost.}$, *considerate come funzioni del parametro* y, *differiscono per una costante addittiva e per un periodo di* (24). *Quando* φ *sia un'aggiunta d'ordine* $m - 3$, *la costante addittiva manca.*

OSSERVAZIONE 1ª. — Se $\varphi = 0$ fosse un'aggiunta d'ordine $m - 3 + l$ $(l \geq 1)$, passante con moltiplicità l per la retta impropria dei piani $y = \text{cost.}$, si perverrebbe analogamente alla conclusione che $U - \bar{U}$ ammette in $y = \infty$ un polo d'ordine $l - 1$, mentre è olomorfa per ogni altro valore di y. Pertanto $U - \bar{U}$ *sarebbe un polinomio d'ordine* $l - 1$ in y.

OSSERVAZIONE 2ª. — Se le curve C, $\bar{C}$ staccano sopra una sezione piana A, fissata nel fascio $y = \text{cost.}$, due gruppi equivalenti di punti, il valore costante, a meno dei periodi, assunto dalla differenza $U - \bar{U}$, s'annulla per ogni y, perchè ciò accade in corrispondenza a quella particolare A. Ne deriva che le C, $\bar{C}$ staccano gruppi equivalenti sopra ogni curva del fascio; e poichè trattasi di curve dello stesso ordine ed il fascio $|A|$ $(y = \text{cost.})$ è di grado > 0 e privo di curve spezzate, le C, $\bar{C}$ risultano equivalenti

[1] Questi Rendiconti, pag. 296.

(Severi, Annali di Mat., 1905). Dunque *per constatare che due curve* C, $\overline{C}$ *dello stesso sistema continuo son equivalenti, non occorre verificare che esse staccano gruppi equivalenti su tutte le curve di un fascio lineare* $|A|$, *di grado* >0, *privo di curve spezzate, bastando per ciò ch'esse stacchino gruppi equivalenti sopra una particolare* A.

13. D'ora innanzi indicheremo con $\varphi_1 = 0, \dots, \varphi_q = 0$ quelle q aggiunte d'ordine $m-2$ ad F, passanti per la retta impropria r dei piani $y = \text{cost.}$, che corrispondono ai q integrali semplici di 1ª specie $I_1, \dots, I_q$ di F. Il loro sistema lineare $\lambda_1 \varphi_1 + \dots + \lambda_q \varphi_q = 0$ non possiede alcun valore critico, perchè i q integrali I sono indipendenti sopra ogni sezione piana $y = \text{cost.}$

Denoteremo inoltre con $\varphi_{q+1} = 0, \dots, \varphi_p = 0$ $p-q$ generiche aggiunte indipendenti d'ordine $m-3$ ad F, così che gl'integrali:

$$I_h = \int \frac{\varphi_h(x, y, z)}{f'_z} dx, \ (h = 1, \dots, q);$$

$$u_{q+j} = \int \frac{\varphi_{q+j}(x, y, z)}{f'_z} dx, \ (j = 1, \dots, p-q),$$

formeranno un sistema lineare non possedente altri valori critici che $y = \infty$ e i valori critici del sistema lineare $\lambda_1 \varphi_1 + \dots + \lambda_q \varphi_q = 0$ (n. 6).

Allora le somme $U_1, \dots, U_q$ fornite dagl'integrali $I_1, \dots, I_q$ nei punti del gruppo (C, A), ove A denoti una prefissata sezione $y = \text{cost.}$, in generale varieranno, col variare di C in un sistema continuo, ed assumeranno anzi $\infty^{q'}$ gruppi di valori, se C fa parte di un sistema continuo completo costituito da $\infty^{q'}$ sistemi lineari distinti ($q' \leq q$). Invece le somme $U_{q+1}, \dots, U_p$ fornite dagl'integrali $u_{q+1}, \dots, u_p$ rimarranno sempre costanti, comunque varî C entro al proprio sistema continuo. Enuncieremo il risultato sotto la seguente forma invariantiva:

Sulla superficie F *sia* C *una curva variabile in un sistema continuo completo, costituito da* $\infty^{q'}$ *sistemi lineari* ($q' \leq q$) *ed* A *una curva irriducibile di genere* p, *atta a definire un fascio lineare di grado* >0. *Allora le* q *somme fornite dagl'integrali semplici di* 1ª *specie di* F *nei punti del gruppo* (C, A), *al variare continuo di* C, *assumono* $\infty^{q'}$ *gruppi distinti di valori; mentre le somme fornite dai* $p-q$ *integrali abeliani di* 1ª *specie indipendenti, individuati su* A *dal proprio sistema aggiunto* $|A'|$, *restano costanti.*

Quando sia $q' < q$ (ma $q' > 0$), poichè la varietà $V_{q'}$ i cui punti rappresentano i sistemi lineari del nostro sistema continuo, è ancora, come nel caso $q' = q$, una varietà di Picard, dotata soltanto di q' integrali semplici di 1ª specie (Severi, questi Rendiconti, 1916, pag. 559), così le q somme fornite dagl'integrali semplici di 1ª specie di F, in corrispondenza alla C

del sistema, riduconsi a q' linearmente indipendenti. Vi sono cioè $q - q'$ integrali di F, che dànno somme costanti nei gruppi (C, A). In tal caso F possiede q' integrali semplici di 1ª specie riducibili, con $2q'$ periodi ridotti (ibidem, pag. 560).

14. Si presenta ora la seguente importante questione: Che cosa si può dire di due curve C_1, C_2, le quali stacchino sulla curva A, di cui sopra, due gruppi di punti (C_1, A), (C_2, A) nei quali gl'integrali $u_{q+1}, \ldots, u_p$ dieno somme congrue rispetto ai $2p$ periodi di tali integrali?

Occorre anzitutto avvertire che, quando gl'integrali semplici di 1ª specie di F si considerano come integrali abeliani (riducibili) inerenti alla curva A, la congruenza fra le somme dei valori degl'integrali $I_1, \ldots, I_q$ nei gruppi (C_1, A), (C_2, A) può considerarsi da due punti di vista:

1) si può richieder che le somme stesse siano a due a due congruenti, assumendosi a moduli delle congruenze i $2q$ periodi primitivi (ridotti) degl'integrali $I_1, \ldots, I_q$;

2) oppure si può richiedere che quelle somme sieno congruenti rispetto ai $2p$ periodi primitivi (non ridotti) degli integrali abeliani $I_1, \ldots, I_q$.

Evidentemente il secondo punto di vista è più restrittivo del primo, perchè due quantità che sieno congrue nel senso 2) lo sono anche nel senso 1); ma non, necessariamente, viceversa.

Supposto che le q coppie di somme sieno congrue nel senso 1), ho provato altrove (Rendiconti di Palermo, 1906), che, se le C_1, C_2 appartengono ad uno stesso sistema continuo, esiste un intero d tale che le due curve dC_1, dC_2 son equivalenti: $dC_1 \equiv dC_2$.

Se invece le q suddette coppie di somme son congrue nel senso 2), e le C_1, C_2 appartengono sempre ad uno stesso sistema continuo, siamo ora in grado di affermare che sarà addirittura $C_1 \equiv C_2$. Infatti, appunto perchè C_1, C_2 appartengono allo stesso sistema continuo, le somme fornite dagli integrali $u_{q+1}, \ldots, u_p$ nei gruppi (C_1, A), (C_2, A) son congrue rispetto ai $2p$ periodi primitivi di questi integrali (n. 12); e quindi, se è soddisfatta l'ipotesi 2), i due gruppi (C_1, A), (C_2, A), in virtù dell'ordinario teorema d'Abel sulle curve, son equivalenti; donde segue l'equivalenza delle C_1, C_2, in forza dell'osserv. 2ª del n. 12. Si può pertanto enunciare:

Sopra una superficie F *abbiansi due curve* C_1, C_2, *di uno stesso sistema continuo, che seghino sopra una terza curva irriducibile* A, *di genere* p, *atta a definire un fascio lineare di grado* > 0, *due gruppi di punti* (C_1, A), (C_2, A) *nei quali gl'integrali semplici di* 1ª *specie di* $F, I_1, \ldots, I_q$, *dieno somme eguali, a meno di multipli interi dei* $2q$ *periodi primitivi di* $I_1, \ldots, I_q$. *Esiste allora un intero positivo* d *tale che le curve* dC_1, dC_2 *son equivalenti. Ma se le somme stesse sono anche eguali a meno di multipli interi dei* $2p$ *periodi di* $I, \ldots I_q$, *considerati come integrali abeliani di* A, *allora le* C_1, C_2 *sono addirittura equivalenti.*

Osservazione. — Poichè d è il minimo comune multiplo dei *divisori* $d_1, \dots, d_q$ *della varietà picardiana* V_q *annessa ad* F (Severi, Rend. di Palermo, 1906), quando questa abbia i divisori eguali ad 1, risulta $d = 1$, ed allora i due modi 1) e 2) di considerare le congruenze delle solite q somme non sono in realtà diversi.

15. Innanzi di venir a parlare della questione fondamentale sollevata al principio del n. prec., convien richiamare taluni concetti, relativi ai sistemi continui di curve tracciati sulla superficie F, da me posti in precedenti lavori.

Un sistema continuo di curve algebriche C su F è sempre contenuto in un sistema algebrico $\}C\{$. Se $\}C\{$ è irriducibile, come totalità di curve, e non è contenuto in un sistema più ampio di curve dello stesso ordine, esso dicesi *completo*. Se si considerano i sistemi lineari individuati dalle C di un sistema completo, mentre accade che il generico di tali sistemi sta tutto in $\}C\{$, può darsi, per qualche particolare posizione, che il sistema $|C|$ esorbiti da $\}C\{$. Tuttavia la varietà dei sistemi lineari $|C|$ continua anche in tal caso ad esser irriducibile, prendendone come elementi i sistemi lineari. La s'indica con (C). E anche per una siffatta varietà (C) si può parlare di completezza, quando essa non sia contenuta in una varietà più ampia di sistemi lineari dello stesso ordine.

Due curve C_1, C_2 di F diconsi *algebricamente equivalenti*, e si scrive $C_1 \equiv C_2$, quando i sistemi lineari $|C_1|$, $|C_2|$ appartengono ad una medesima varietà completa (C) di sistemi lineari dello stesso ordine; oppure quando si può determinare una curva D tale che $|D + C_1|$, $|D + C_2|$ appartengano ad una medesima varietà completa $(D + C)$. Si dimostra che tale definizione equivale a ciò: che le C_1, C_2 posson considerarsi come resti di una medesima C, rispetto ad un sistema irriducibile *di curve*.

Si dirà anche in tal caso che *la curva virtuale* (Severi, Rendiconti Ist. Lombardo, 1905) $C_1 - C_2$ *è algebricamente equivalente alla curva zero:* $C_1 - C_2 \equiv 0$. Infine si dirà che più curve $C_1, \dots, C_t$ sono *algebricamente dipendenti* secondo i numeri interi $\lambda_1, \dots, \lambda_t$ (dei quali alcuni positivi ed altri negativi), quando la curva virtuale $\lambda_1 C_1 + \dots + \lambda_t C_t$ è algebricamente equivalente alla curva zero.

Ciò premesso, supponiamo che le due curve C_1, C_2 dello stesso ordine, ma delle quali non sappiamo a priori che appartengono allo stesso sistema continuo, soddisfacciano a questa condizione: che le somme $c_{q+1}, \dots, c_p$; $c'_{q+1}, \dots, c'_p$ fornite dagl'integrali $u_{q+1}, \dots, u_p$ nei punti dei gruppi (C_1, A), (C_2, A) sieno congrue rispetto ai $2p$ periodi primitivi di questi integrali; e che ciò si verifichi non soltanto per una posizione particolare di A, ma al variare di A nel proprio fascio. Consideriamo dapprima il caso generale in cui una delle curve date, p. es. C_1, sia atta a definire un sistema continuo (C_1), costituito da ∞^q sistemi lineari; e sieno $c_1, \dots, c_q$; $c'_1, \dots, c'_q$ i valori delle somme degl'integrali $I_1, \dots, I_q$ nei punti dei gruppi (C_1, A), (C_2, A).

Al variare di C_1, o meglio del sistema lineare $|C_1|$ entro (C_1), le $c_1, \dots, c_q$ assumono ∞^q gruppi di valori, incongrui, non soltanto dal punto di vista 1) del n. 14, ma anche dal punto di vista 2), perchè due gruppi di valori di $c_1, \dots, c_q$, congrui rispetto ai $2p$ periodi non ridotti degl'integrali abeliani $I_1, \dots, I_q$, non posson provenire, a cagione del teorema del n. prec., che da curve C_1 equivalenti fra loro. Vi sarà pertanto in (C_1) una curva $\bar{C}_1$ per la quale le dette somme assumeranno, a meno di multipli interi dei suddetti $2p$ periodi, i valori $c'_1, \dots, c'_q$.

Quanto alle somme degl'integrali $u_{q+1}, \dots, u_p$ nei punti del gruppo $(\bar{C}_1, A)$ esse saranno congrue a $c_{q+1}, \dots, c_p$ (n. 14) e quindi a $c'_{q+1}, \dots, c'_p$, le congruenze avendo anche qui luogo rispetto ai $2p$ periodi di $u_{q+1}, \dots, u_p$.

Ciò significa che sulla A i due gruppi $(\bar{C}_1, A)$, (C_2, A) son equivalenti fra loro e quindi che lo sono pure le curve $\bar{C}_1$, C_2, le quali staccano gruppi equivalenti sopra *ogni* curva A. Ricordando che (C_1) è individuato da uno qualunque $|C_1|$ oppure $|\bar{C}_1|$ dei suoi sistemi lineari, appunto perchè consta di ∞^q sistemi lineari distinti (Severi, questi Rend., 1916, pag. 561), ne consegue che C_2 appartiene a (C_1), cioè che $C_1 \equiv C_2$.

Consideriamo adesso il caso eccezionale in cui nè C_1, nè C_2 stanno in sistemi continui di ∞^q sistemi lineari. Assumiamo allora un sistema (D), formato da ∞^q sistemi lineari, e, fissata una curva D di questo sistema, consideriamo le curve $D + C_1$, $D + C_2$, ciascuna delle quali individua un sistema $(D + C_1)$, $(D + C_2)$, formato da ∞^q sistemi lineari distinti. Le $D + C_1$, $D + C_2$ verifican le ipotesi cui prima soddisfacevano le C_1, C_2, e si può pertanto affermare che i due sistemi $(D + C_1)$, $(D + C_2)$ coincidono e quindi, anche in tal caso, $C_1 \equiv C_2$. Riassumendo possiamo enunciare:

La condizione necessaria e sufficiente affinchè due curve C_1, C_2 *dello stesso ordine, tracciate sulla superficie* F, *siano algebricamente equivalenti, è che i* $p - q$ *integrali abeliani di* 1ª *specie individuati sopra una curva irriducibile* A, *di genere* p, *variabile in un fascio lineare di grado* > 0, *privo di curve spezzate, dal proprio sistema aggiunto* $|A'|$, *dieno somme congrue nei gruppi* (C_1, A), (C_2, A).

Osservazione. — I $p - q$ integrali $u_{q+1}, \dots, u_p$ formano sulla curva A un sistema regolare d'integrali abeliani di 1ª specie riducibili, avente $2(p - q)$ periodi ridotti, il quale è complementare del sistema regolare di q integrali riducibili staccato su A dagl'integrali di 1ª specie di F.

Si possono perciò considerare anche qui le congruenze delle somme fornite dagl'integrali $u_{q+1}, \dots, u_p$, nei gruppi (C_1, A), (C_2, A), dai due punti di vista indicati nel n. 14. E cioè si può porre o la condizione che le dette somme sieno congrue rispetto ai $2p$ periodi non ridotti o che lo sieno rispetto ai $2(p - q)$ periodi primitivi ridotti. Nel primo caso si cade nell'ipotesi del teorema ultimamente dimostrato; nel secondo si potrà determinare un intero λ tale che i multipli secondo λ delle somme suddette sieno congrui rispetto ai $2p$ periodi non ridotti. Ne seguirà la equivalenza algebrica delle due curve $\lambda C_1, \lambda C_2$.