# ATTI

DELLA

# REALE ACCADEMIA NAZIONALE

# DEI LINCEI

ANNO CCCXVIII.

1921

---

SERIE QUINTA

---

# RENDICONTI

---

**Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.**

---

**VOLUME XXX.**

1° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1921

cacia è stata direttamente provata. Non intendiamo naturalmente di escludere che oltre a queste altri tipi di disolfuri attivi possano esistere.

Scott e Bedford ricordano che secondo J. Bloch [1] i persolfuri d'idrogeno possono vulcanizzare a freddo le soluzioni di gomma. Noi dobbiamo però dire che abbiamo tentato ripetutamente di riprodurre questa reazione in diverse condizioni, ma non vi siamo riusciti.

Dallo schema da noi tracciato resta fuori l'azione accelerante dei nitrosoderivati aromatici. Per la nitrosodimetilanilina ed omologhi si può ammettere la formazione del benzotiazolo, analogamente a quanto hanno osservato Rassow e Dohle per la dimetilanilina, ma nulla di simile può dirsi per composti come il nitrosobenzolo ed il nitrosofenolo, per i quali bisogna probabilmente ricorrere all'azione dei nitrosogruppi sui doppi legami, scoperta da A. Angeli [2] appunto a proposito dell'azione del nitrosobenzolo sulla gomma. Questa pubblicazione sembra esser rimasta sconosciuta a Peachey.

## MEMORIE E NOTE PRESENTATE DA SOCI

### Matematica. — *Sur les fonctions permutables.* Nota di JOSEPH PÉRÈS, presentata dal Socio V. VOLTERRA [3].

1. Les transformations $\Omega$ de notre Note précédente [4] jouissent des propriétés suivantes:

1°. Elles font correspondre, à toute fonction $\lambda(y-x)$, une fonction $G(x,y)$;

2°. Elles sont linéaires en $\lambda$ (distributives et continues).

3°. Elles conservent la composition.

J'ai déjà indiqué que l'on peut remplacer la condition 3° par la suivante: si $F(x,y)$ est la transformée de 1, $\overset{*}{F}{}^n$ est la transformée de $\overset{*}{1}{}^n$ ($n$ entier) [5].

Nous reviendrons sur les transformations jouissant de ces propriétés; bornons nous à indiquer ici qu'il ne peut en exister plus d'une telle que, par exemple, $\Omega(1)$ ait une valeur assignée F. Dans ce cas, en effet, $\overset{*}{1}{}^n$ aura pour transformée $F^n$ (d'après 3°); la valeur de la transformée de $\lambda$ en ré-

(1) D. R. P.

(2) Questi Rendiconti.

(3) Presentata nella seduta del 16 gennaio 1921.

(4) Rend. R. Acc. Lincei, fasc. 10, pag. 318. Lorsque nous aurons à citer cette Note dans la suite, nous la désignerons par [A].

(5) Bull. Soc. Math. de France, 1919.

sulte immédiatement si $\lambda$ est un polynome, puis si $\lambda$ est continue quelconque (d'après 2°) [1].

Parmi les transformations jouissant de ces propriétés, on doit citer, à côté de celles déjà examinées, celles qu'a définies M. Volterra et qui lui servent dans la réduction d'une fonction à la forme canonique [2].

Signalons aussi une généralisation: on peut dans 1°, remplacer l'ensemble des fonctions $\lambda$ permutables avec l'unité par un autre groupe de fonctions permutables; en d'autres termes envisager des transformations ayant les propriétés 2° et 3° et faisant passer d'un groupe de fonctions permutables à un autre. Le passage à ce cas plus général est particulièrement simple pour les transformations mises sous la forme (4) de ma Note [A].

2. Reprenons une $\Omega$ du type considéré dans [A]. Elle peut se mettre sous la forme

$$G(x, y) = (\dot{1}^0 + \dot{m})\,\dot{\lambda}\,(\dot{1}^0 + \dot{n}), \tag{1}$$

$m$ et $n$ étant deux noyaux associés de Volterra, c'est-à-dire vérifiant

$$(\dot{1}^0 + \dot{m})(\dot{1}^0 + \dot{n}) = (\dot{1}^0 + \dot{n})(\dot{1}^0 + \dot{m}) = \dot{1}^0. \tag{2}$$

Cette transformation fait correspondre, au groupe U du cycle fermé, un groupe C de fonctions permutables constituant, comme on le voit sans peine, l'ensemble de *toutes* les fonctions permutables avec une quelconque d'entre elles. La transformation peut être dite régulière si $\Omega(1)$ est une fonction régulière [3].

Parmi les transformations précédentes, il convient de signaler celles, que nous nommerons $\omega$, qui transforment le groupe U en lui-même; elles sont toutes régulières [4].

Il est clair que en général, deux transformations (1) différentes peuvent conduire au même groupe C: pour obtenir, à partir de l'une d'elles, toutes les $\Omega$ qui conduisent au groupe C, il suffit d'y effectuer, sur $\lambda$, toutes

(1) La condition d'existence d'une transformation de ce genre [jouissant des propriétés 1° à 3° et telle que $\Omega(1) = F$] peut être mise sous la forme suivante: si le polynome $a_0 \dot{1} + a_1 \dot{1}^2 + \cdots + a_n \dot{1}^n$ est inférieur en module à $\varepsilon$, le polynome de composition $a_0 \dot{F} + a_1 \dot{F}^2 + \cdots + a_n \dot{F}^n$, qui doit lui correspondre dans la transformation, est inférieur à $K\varepsilon$.

(2) Cf. Volterra, *Sulla teoria delle potenze, dei logaritmi, delle funzioni di composizione* (Atti Lincei, 1916, n. 7).

(3) $F''_{xy}$ existe. Ce cas à déjà été caractérisé ([A], n.os 3, 4, 6).

(4) En effet, dans ce cas, le noyau $\Phi(\xi; x, y)$ ⟨cf. [A], équation (1)⟩ ne doit dépendre que de $\xi$ et $y - x$; l'équation qui exprime qu'il conserve la composition se simplifie alors, on vérifie que la formule (2) de [A] (où l'on prend $f$ fonction de la seule variable $y - x$) en donne la solution générale.

les $\omega$. Ces diverses transformations sont en même temps régulières ou non ; dans le premier cas, le groupe C sera dit régulier.

3. Envisageons maintenant une transformation

$$(1') \qquad G(x, y) = (\dot{1}^o + \dot{M})\, \dot{\lambda}\, (\dot{1}^o + \dot{N}),$$

M et N (données) n'étant plus assujetties à vérifier l'équation

$$(2') \qquad (\dot{1}^o + \dot{M})(\dot{1}^o + \dot{N}) = (\dot{1}^o + \dot{N})(\dot{1}^o + \dot{M}) = \dot{1}^o.$$

Cette transformation ne conserve plus la composition, mais les $G(x, y)$ forment un groupe de fonctions permutables si

$$(\dot{1}^o + \dot{N})(\dot{1}^o + \dot{M})$$

appartient au groupe U, en d'autres termes si

$$(3) \qquad N + M + \dot{N}\dot{M} = h(y - x)$$

($h$ arbitraire). Les types (1) et (1') se ramènent alors aisément l'un à l'autre.

La condition (3) entraine pour M et N des équations intégro-différentielles faciles à former [1]. Nommons $\Delta$ l'opération $\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}$; on vérifie que

$$(4) \qquad \Delta(\dot{M}\dot{N}) = \overline{\dot{\Delta M}}\, \dot{N} + \dot{M}\, \overline{\dot{\Delta N}}$$

de sorte que (3) équivaut à

$$\Delta N + \Delta M + \overline{\dot{\Delta N}}\, \dot{M} + \dot{N}\, \overline{\dot{\Delta M}} = 0$$

ou

$$\overline{\dot{\Delta N}}(\dot{1}^o + \dot{M}) = -(\dot{1}^o + \dot{N})\, \overline{\dot{\Delta M}}.$$

D'où, en nommant

$$(\dot{1}^o + \dot{N})\, \dot{f}\, (\dot{1}^o + \dot{M})$$

la valeur commune de ces rapports, résulte, en M et N, les relations intégro-différentielles

$$(\alpha) \qquad \left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}\right) N = \quad f + \dot{N}\dot{f}$$

$$(\beta) \qquad \left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}\right) M = - f - \dot{f}\dot{M}.$$

4. Admettons maintenant que $f$ soit donnée. Soit $M_0$ et $N_0$ deux solutions de ($\alpha$) et ($\beta$) telles que (2') soit vérifiée [2]. Il résulte de (3) que la

[1] Nous nous plaçons, pour le faire, dans le cas régulier; au cas général sera consacrée une Note suivante.

[2] On peut choisir l'une d'elles, $M_0$ par exemple, solution quelconque de ($\beta$); $N_0$ en résulte par la formule $N_0 = -M_0 + \dot{M}_0^2 - \dot{M}_0^3 + \dots$.

solution générale de $(\alpha)$ sera telle que

$$(\dot{1}^{o} + \dot{\mathrm{N}}) = (\dot{1}^{o} + \dot{h})(\dot{1}^{o} + \dot{\mathrm{N}}_0);$$

d'où

$$\mathrm{N} = h + \mathrm{N}_0 + \dot{h}\dot{\mathrm{N}}_0,$$

$h$ étant fonction arbitraire de $y - x$. De même la solution générale de $(\beta)$ sera

$$k + \mathrm{M}_0 + \dot{\mathrm{M}}_0 \dot{k} \qquad [k(y-x) \text{ arbitraire}].$$

On vérifiera que l'équation $(\alpha)$ coïncide avec l'équation intégro-différentielle que l'on peut déduire, pour $n$, de l'équation (8) de ma Note [A].

De ce fait et des expressions précédentes pour M et N, résulte bien aisément que, si l'on détermine $f$ par la relation (2″) de [A], la formule (1′) [où M et N sont solutions quelconques de $(\alpha)$ et $(\beta)$] représente toutes les fonctions permutables avec $\mathrm{F}(x, y)$.

Un mot sur la résolution des équations $(\alpha)$ et $(\beta)$: elles sont de types traités par M. Volterra [1]. Nous indiquerons ici comment leur solution introduit la transcendante $\Phi(\xi; x, y)$ donnée par la formule (2) de [A]: on peut prendre, par exemple,

$$\mathrm{N}(x, y) = \Phi(x; o, y) \qquad \mathrm{M}(x, y) = \Phi(b - y, x, b) \text{ [2]}.$$

5. Toutes les fonctions permutables avec $\mathrm{F}(x, y)$, données par la formule

$$\mathrm{G} = (\dot{1}^{o} + \dot{\mathrm{M}})\dot{\lambda}(\dot{1}^{o} + \dot{\mathrm{N}})$$

sont alors telles que

$$\varDelta\mathrm{G} = \overline{\varDelta\dot{\mathrm{M}}}\,\dot{\lambda} + \dot{\lambda}\,\overline{\varDelta\dot{\mathrm{N}}} + \overline{\varDelta\dot{\mathrm{M}}}\,\dot{\lambda}\,\dot{\mathrm{N}} + \dot{\mathrm{M}}\,\dot{\lambda}\,\overline{\varDelta\dot{\mathrm{N}}}$$

ou, d'après $(\alpha)$ et $(\beta)$

$$(\gamma) \qquad \left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}\right)\mathrm{G} = \dot{\mathrm{G}}\dot{f} - \dot{f}\dot{\mathrm{G}} \text{ [3]}.$$

[1] Cf. par exemple, *Leçons sur les fonctions de lignes*, p. 163.

[2] Cette fonction $\Phi(\xi; x, y)$ est fort avantageuse à considérer, pour la simplicité de sa définition et ses nombreuses propriétés. Signalons ici, à côté des relations (4), (6′) et (7) du Mémoire déjà cité (Ann. Ec. Norm.) la relation analogue

$$\Psi_0(\tau; x, y) = f(x-\tau, y-\tau) + \int_x^y f(x-\tau, \zeta-\tau)\,\Psi_0(\tau; \zeta, y)\,d\zeta$$

pour $\Psi_0$ qui lui est simplement reliée [Ibid. n. 6]. Cette relation conduit à $(\beta)$ pour $y =$ constante; (6′) conduit à $(\alpha)$ pour $x =$ constante; d'où les formules du texte.

[3] Ou encore

$$\dot{\mathrm{F}}^{-1}\dot{\mathrm{G}} = \dot{\mathrm{G}}\dot{\mathrm{F}}^{-1}.$$

C'est l'équation qui est à la base de la méthode de recherche des fonctions permutables de M. Volterra: il l'établit pour toute fonction du groupe de forme $G = \overset{*}{F}\overset{*}{G}' = \overset{*}{G}'\overset{*}{F}$; il en résulte qu'elle doit être générale, comme nous venons de le vérifier. Elle caractérise les fonctions du groupe.

Une remarque pour terminer. Nous avons vu que, à chaque $f$ correspond une transformation ⟨dont le noyau est donné par la formule (2) de [A]⟩ conservant la composition et faisant passer, de $U$, à un groupe C de fonctions permutables. L'équation ($\gamma$) rend évident le fait, facile à vérifier directement, que le groupe C ne change point si l'on ajoute à $f$ une fonction quelconque du groupe (et inversement) (¹).

## Cristallografia. — *Sulla forma cristallina della Trimetilfloretina* $C_6H_2O_3(CH_3)_3 \,.\, CO \,.\, CH(CH_3) \,.\, C_6H_4OH$ (²). Nota di MARIA DE ANGELIS (³), presentata dal Socio ARTINI.

La sostanza, preparata per la prima volta e descritta da Ciamician e Silber (⁴), mi fu affidata per lo studio dal prof. Körner.

P. fus. = 152°.

*Sistema monoclino, classe prismatica:*

$$a : b : c = 0.4505 : 1 : 0.3410$$
$$\beta = 71^\circ.13'$$

Forme osservate:

$$\{010\},\ \{001\},\ \{110\},\ \{210\},\ \{\bar{2}01\},\ \{\bar{1}11\},\ \{\bar{2}11\},\ \{\bar{2}12\}.$$

I cristalli ottenuti da miscela di etere ed alcool etilico presentano ordinariamente la semplice combinazione delle forme: $\{010\}$, $\{001\}$, $\{110\}$, $\{\bar{1}11\}$, alle quali qualche volta si aggiungono piccole faccette di $\{20\bar{1}\}$ (fig 1). Più ricchi sono ordinariamente i cristalli che si hanno da soluzioni in etere acetico; questi presentano di solito, come i precedenti, abito grossolanamente tabulare secondo $\{010\}$ (fig. 2) e per lo più sono formati dalla combinazione di tutte le forme osservate, meno la $\{\bar{2}11\}$ la quale fu trovata con due faccettine piccolissime in un unico cristallo.

Abbastanza frequenti sono i geminati nei quali l'uno dei due individui ricopre l'altro per rotazione di 180° intorno all'asse $x$. Alcuni di questi

(¹) Cf. aussi la fin du n. 2.

(²) Lavoro eseguito nel Laboratorio di Mineralogia del Museo Civico di Storia Naturale di Milano.

(³) Presentata nella seduta del 6 febbraio 1921.

(⁴) G. Ciamician u. P. Silber, *Ueber die Constitution des Maclurins und Phloretins*. Berichte der Deutschen Chem. Ges. 28, p. 1393 (1895).