ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA NAZIONALE

DEI LINCEI

ANNO CCCXVIII.

1921

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXX.

1° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1921

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 19 giugno 1921.

F. D'Ovidio, Presidente.

MEMORIE E NOTE DI SOCI

Matematica. — *Sulle funzioni abeliane.* IV: *Applicazioni alle serie algebriche di gruppi sopra una curva.* Nota del Socio G. Castelnuovo.

12. Data sopra una curva C di genere p [1] una serie algebrica γ_n^r di ∞^r gruppi di n punti, dei quali gruppi supporremo che mai due siano equivalenti ($r \leqq p$), conviene in varie questioni sostituire alla serie (con Torelli e Rosati) una nuova serie γ_p^r della stessa dimensione e di ordine p, in corrispondenza birazionale con quella. La γ_p^r dicesi *equivalente* alla γ_n^r se le somme dei valori di ciascun integrale abeliano di prima specie in due gruppi corrispondenti delle due serie coincidono (a meno di periodi) o differiscono di una costante; dicesi invece *residua* se la somma dei detti valori in tutti gli $n+p$ punti di due gruppi corrispondenti rimane costante al variare dei gruppi stessi. In linguaggio geometrico, nel primo caso la differenza, nel secondo caso la somma di due gruppi corrispondenti di γ_n^r e γ_p^r varia in una serie lineare. Questa serie, se γ_n^r e γ_p^r sono residue, è una g_{n+p}^n che può supporsi non speciale. Segue che l'indice della γ_n^r, cioè il numero dei gruppi contenenti r punti assegnati, uguaglia il numero dei gruppi della γ_n^r contenuti in una serie lineare g_{n-r+p}^{n-r} (residua di quegli r punti rispetto alla g_{n+p}^n).

[1] Ved. le Note precedenti I, II e III in questi Rendiconti, vol. XXX, 1° sem. 1921, pp. 50, 99, 195.

13. Le considerazioni seguenti si applicano ad una serie γ_n^1 i cui gruppi corrispondano birazionalmente ai punti della curva sostegno C. Questa restrizione, che potrebbe togliersi senza difficoltà, è posta per rendere più breve e chiaro il ragionamento.

Tra il punto ζ che descrive la curva C e i punti $\zeta_1', \ldots, \zeta_n'$ che costituiscono il gruppo corrispondente della γ_n^1 passano (secondo Hurwitz) le p relazioni seguenti, ove $j_1, \ldots, j_p$ indicano gli integrali normali di prima specie relativi alla solita tabella di periodi [III, (30)]:

$$(45) \qquad j_h(\zeta_1') + \ldots + j_h(\zeta_n') = \varrho_{h1} j_1(\zeta) + \ldots + \varrho_{hp} j_p(\zeta) + \varrho_h .$$

Le ϱ_h e ϱ_{hl} sono costanti, quest'ultime legate ai periodi σ degli integrali j da $2p^2$ relazioni a coefficienti interi g:

$$(46) \qquad \begin{cases} \varrho_{hl} = g_{lh} + g_{lp+1}\sigma_{h1} + \cdots + g_{l2p}\sigma_{hp} , \\ \sum_{i=1}^{p} \varrho_{hi}\sigma_{il} = g_{p+lh} + g_{p+lp+1}\sigma_{h1} + \cdots + g_{p+l2p}\sigma_{hp} , \end{cases}$$
$$(h, l = 1, 2, \ldots p) .$$

Avremo occasione tra poco di considerare, insieme alla γ_n^1 data, le serie multiple $\gamma_{2n}^2, \gamma_{3n}^3, \ldots$ che si ottengono riunendo a coppie, a terne ... i gruppi della γ_n^1, serie che supporremo prive o liberate da gruppi equivalenti. E ad esse potremo sostituire le $\gamma_p^1, \gamma_p^2, \gamma_p^3 \ldots$ equivalenti. La prima di queste può definirsi mediante le (45) ove a primo membro, in luogo di n, si scriva p; se, nella stessa ipotesi, al posto di $j_i(\zeta)$ a secondo membro si sostituiscono le somme dei valori che j_i assume in due, tre, ... punti di C, il gruppo $\zeta_1', \ldots, \zeta_p'$ varierà in γ_p^2 o $\gamma_p^3, \ldots$ In breve, se per un dato gruppo di p punti $\zeta_1, \ldots, \zeta_p$, scriviamo

$$(29) \qquad u_i = j_i(\zeta_1) + \ldots + j_i(\zeta_p) \qquad (i = 1, 2, \ldots, p)$$

e indichiamo con u_i' le analoghe somme relative ad un secondo gruppo $\zeta_1', \ldots, \zeta_p'$, possiamo dire che le p relazioni

$$(47) \qquad u_h' = \varrho_{h1} u_1 + \varrho_{h2} u_2 + \ldots + \varrho_{hp} u_p + \varrho_h$$

definiscono la γ_p^1, o la γ_p^2, o la $\gamma_p^3, \ldots$ secondo che dei punti $\zeta_1, \ldots, \zeta_p$ teniamo fissi $p-1$, o $p-2$, o $p-3, \ldots$, lasciando variare i rimanenti.

Le (47), ove si cambino i segni a tutte le ϱ_{hl}, rappresentano invece, nelle stesse ipotesi, le serie $\gamma_p^1, \gamma_p^2, \gamma_p^3, \ldots$, *residue* della γ_n^1 e dei suoi multipli.

La corrispondenza algebrica (45), che muta ogni punto ζ in un gruppo $\zeta_1', \ldots, \zeta_n'$ della γ_n^1, ammette una corrispondenza inversa che muta ogni punto ζ' in un certo gruppo $\zeta_1, \ldots, \zeta_\nu$, ove ν è l'indice della γ_n^1. Varranno, al solito, relazioni del tipo

$$(48) \qquad j_h(\zeta_1) + \ldots + j_h(\zeta_\nu) = \bar{\varrho}_{h1} j_1(\zeta') + \ldots + \bar{\varrho}_{hp} j_p(\zeta') + \bar{\varrho}_h ,$$

nelle quali le costanti $\bar{\varrho}_{hl}$ sono definite (secondo Hurwitz) da relazioni analoghe alle (46), in cui però gli interi g siano sostituiti da nuovi interi $\bar{g}$ legati ai precedenti dalle uguaglianze

$$(49) \qquad \begin{cases} \bar{g}_{hl} = g_{lh} \ , \ \bar{g}_{p+h,\,p+l} = g_{p+l,\,p+h} \\ \bar{g}_{h,\,p+l} = -\,g_{l,\,p+h} \ , \ \bar{g}_{p+h,\,l} = -\,g_{p+l,\,h} \end{cases} \qquad (h\,,\,l = 1\,,2\,,\ldots p)\,.$$

Il prodotto della corrispondenza diretta per la inversa è una corrispondenza simmetrica $(\nu n\,,\,\nu n)$ che muta ogni punto η di C nei νn punti η' costituenti i ν gruppi della γ_n^1 che contengono η, tra i quali punti comparisce anche η contato ν volte.

Per questa nuova corrispondenza valgono equazioni del tipo

$$(50) \qquad j_h(\eta'_1) + \ldots + j_h(\eta'_{\nu n}) = \pi_{h1}\, j_1(\eta) + \ldots + \pi_{hp}\, j_p(\eta) + \pi_h\,,$$

ove

$$\pi_{hl} = \sum_{i=1}^{p} \bar{\varrho}_{hi}\, \varrho_{il}\,.$$

Si ha dunque

$$(51) \qquad \| \pi_{hl} \| = \| \bar{\varrho}_{hl} \| \cdot \| \varrho_{hl} \|\,,$$

eseguendo il prodotto secondo la nota regola del calcolo delle matrici.

Se formiamo, come al n. 10, la equazione caratteristica (34) o (35) delle π_{hl}, troviamo, come coefficienti, certi numeri interi positivi $i_1\,, i_2\,, \ldots\,, i_p$ che forniscono altrettanti caratteri invarianti (per trasformazioni birazionali) della γ_n^1 data o della γ_p^1 equivalente. Ci proponiamo di stabilirne i significati geometrici.

14. Riprendiamo a tal fine la varietà di Jacobi V_p relativa alla curva C (III, n. 9), varietà descritta da un punto dello spazio S_{p+1}, le cui coordinate cartesiane siano funzioni abeliane dei p parametri u_i dati dalle (29). La corrispondenza algebrica (45) esistente sulla curva C determina una corrispondenza razionale (47) entro la V_p, per effetto della quale ogni punto u si muta in *un* punto u', mentre ad ogni punto u' corrispondono

$$\delta = \| g_{rs} \| = \| \bar{\varrho}_{hl} \| \cdot \| \varrho_{hl} \| = \| \pi_{hl} \|$$

punti u.

Se il punto u' descrive in V_p una varietà Θ del primo ordine, rappresentata dall'annullarsi di una funzione ϑ riemanniana, i δ punti u corrispondenti descrivono una varietà intermediaria Φ che ha gli interi caratteristici

$$m_{rs} = \sum_{i=1}^{p} (g_{ri}\, g_{sp+i} - g_{rp+i}\, g_{si})$$

ed è collegata, nel senso spiegato al n. 10, alla corrispondenza simmetrica (50). Perciò gli invarianti $i_1\,, i_2\,, \ldots\,, i_p$ nominati al n. 13 sono pure invarianti della Φ ed hanno, per questa, i significati geometrici esposti ai nn. 10 e 11.

Se invece facciamo muovere il punto u lungo una varietà V_r, a r dimensioni, immersa in V_p, il punto u' che gli corrisponde per le (51) descriverà una varietà V'_r che, in generale, sarà una trasformata birazionale della V_r. Se questa si riduce alla V_1 che rappresenta i gruppi G_p della curva C aventi $p-1$ punti fissi, la V'_1 rappresenterà i G_p di una γ^1_p equivalente alla γ^1_n data. In generale se V_r è la immagine dei G_p con $p-r$ punti fissi, sarà V'_r la immagine di una γ^r_p equivalente alla serie γ^r_{rn}, multipla (n. 13) della γ^1_n data.

L'indice ν_r di questa γ^r_p è il numero delle intersezioni della V'_r, sua immagine, con una V_{p-r}, immagine dei G_p aventi r punti fissi; in simboli

$$\nu_r = [V'_r V_{p-r}] .$$

Ora fu già dimostrato [III, (39)] che questo numero è uguale al numero delle intersezioni di V'_r con r varietà Θ generiche del 1° ordine, diviso per $r!$:

$$\nu_r = \frac{1}{r!} [V'_r \Theta^r] .$$

D'altra parte il numero indicato nella nuova parentesi quadra si calcola subito se si applica alla varietà V'_r e alle varietà Θ la trasformazione $(1, \delta)$ definita dalle (47). La V'_r si trasforma nella V_r (in corrispondenza biunivoca con essa), presa insieme con un'altra varietà a r dimensioni che non interessa; le Θ si trasformano nelle varietà intermediarie Φ sopra nominate. Abbiamo dunque, applicando la (39) e la (36) della Nota III,

$$[V'_r \Theta^r] = [V_r \Phi^r] = \frac{1}{(p-r)!} [\Theta^{p-r} \Phi^r] = r!\, i_r$$

e infine

$$\nu_r = i_r .$$

Si conclude che l'invariante i_r della serie data γ^1_n uguaglia l'indice della γ^p_r equivalente alla γ^r_{rn} multipla della γ^1_n.

Alla γ^r_p *equivalente* si può sostituire la γ^r_p *residua*, giacchè nella rappresentazione analitica si passa dall'una all'altra serie mutando segno ai coefficienti ϱ_{hl} delle (47); con ciò cambiano segno anche i coefficienti $\bar{\varrho}_{hl}$ delle (48), ma non muta il determinante (51) dal quale solo dipendono gli invarianti i_h. Se si ricorda ora il n. 12, si conclude:

Data una serie γ^1_n sopra una curva di genere p, si formino le serie γ^2_{2n}, γ^3_{3n}, ... riunendo i gruppi di quella a coppie, a terne, ... Il numero dei gruppi della γ^r_{rn} che appartengono ad una serie lineare $g^{r(n-1)}_{r(n-1)+p}$ generica è dato dall'invariante i_r della γ^1_n.

L'interesse del carattere geometrico in esame, per $r = 1$, fu da me segnalato per tutt'altra via fin dal 1906. Più tardi (1913) il Comessatti [1] ha preso in considerazione gli analoghi caratteri per $r = 2, 3, \ldots, p$ ed ha dimostrato alcune proprietà di questi numeri. La notevole interpretazione analitica stabilita dall'ultimo teorema fa vedere che essi forniscono effettivamente i caratteri più importanti di una serie algebrica, e che in funzione di questi converrà ormai esprimere tutti gli altri caratteri della serie.

15. Sarebbe facile, partendo dalla definizione analitica degli invarianti i_r, ritrovare le proprietà date dal Comessatti per via diversa. Preferisco esporre qui un'altra interpretazione analitica degli invarianti.

Sappiamo già che la serie γ_p^r, residua della γ_{rn}^r, è descritta dal gruppo $\eta_1, \ldots, \eta_p$ definito da

$$j_h(\eta_1) + \cdots + j_h(\eta_p) = -\sum_{\alpha=1}^{r} [\varrho_{h1} j_1(\zeta_\alpha) + \cdots + \varrho_{hp} j_p(\zeta_\alpha)] + \varrho_h,$$

al variare degli r punti $\zeta_1, \ldots, \zeta_r$. L'indice della γ_p^r, ossia il numero dei gruppi contenenti r punti fissi $\eta_1, \ldots, \eta_r$, è il numero delle soluzioni delle p equazioni (o congruenze) scritte, ove si considerino incogniti i punti $\zeta_1, \ldots, \zeta_r, \eta_{r+1}, \ldots, \eta_p$. Dunque:

Si formino le p equazioni a p incognite

$$(52) \quad \sum_{\alpha=1}^{r} [\varrho_{h1} j_1(\zeta_\alpha) + \cdots + \varrho_{hp} j_p(\zeta_\alpha)] + j_h(\eta_{r+1}) + \cdots + j_h(\eta_p) = \text{cost.}$$

Perchè il sistema ammetta un numero finito di soluzioni è necessario che, mentre ζ_α descrive un ciclo sulla superficie di Riemann, il primo membro della (52) *aumenti di un periodo; devono perciò verificarsi le* (46); *restano allora determinati gli interi g_{hl} e, mediante questi, gli invarianti i_r* (n. 13). *In tale ipotesi il sistema* (52) *ammette i_r sistemi di soluzioni $\zeta_1, \ldots, \zeta_r, \eta_{r+1}, \ldots, \eta_p$, ove non si badi all'ordine delle ζ, nè all'ordine delle η.*

Il risultato classico relativo al problema di inversione di Jacobi si ritrova se $\varrho_{hh} = 1$, $\varrho_{hk} = 0$ $(h \neq k)$. Era pur noto (Humbert, Scorza) il caso $r = p$, ove $i_p = \| \pi_{hl} \|$.

[1] *Sulle serie algebriche...*, Rendiconti del Circolo Mat. di Palermo, t. 36.