

ATTI  
DELLA  
REALE ACCADEMIA NAZIONALE  
DEI LINCEI

ANNO CCCXVIII.  
1921

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXX.

1° SEMESTRE.



ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI  
PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1921

Fisica terrestre. — *Sulla profondità dei ghiacciai*. Nota III  
del Socio CARLO SOMIGLIANA.

III.

PROFILI DI 2° ORDINE.

Consideriamo il caso in cui la velocità è massima nel punto medio della sezione, e sia  $v_0$  il suo valore determinato dall'osservazione. Supposto noto questo solo elemento, presa l'origine nel punto medio stesso, l'espressione  $v$  della velocità superficiale, indicando con  $L$  la semilarghezza, sarà

$$v = \varphi(y) = v_0 \left(1 - \frac{y^2}{L^2}\right)$$

e secondo la nostra teoria l'espressione di  $u$  sarà della forma (supposto  $u_r = 0$ )

$$u = v_0 - \frac{v_0}{L^2} (y^2 - z^2) - \frac{1}{2} H z^2$$

che ponendo

$$v_0 = \frac{1}{2} H k^2 \quad \frac{1}{2} H - \frac{v_0}{L^2} = \frac{1}{2} \frac{H k^2}{M^2}$$

diviene

$$(10) \quad u = \frac{1}{2} H k^2 \left(1 - \frac{y^2}{L^2} - \frac{z^2}{M^2}\right)$$

ove le costanti  $k$  ed  $M$  sono legate dalla relazione

$$(11) \quad \frac{1}{L^2} + \frac{1}{M^2} = \frac{1}{k^2}.$$

Il profilo è quindi dato dalla semiellisse di equazione

$$(12) \quad \frac{y^2}{L^2} + \frac{z^2}{M^2} = 1.$$

Siccome  $H$  è una costante conosciuta

$$H = \frac{1}{\mu} \rho g \sin \alpha$$

la costante  $k$  sarà conosciuta mediante il valore della velocità superficiale massima  $v_0$ , e la  $M$  che dà la profondità massima sarà determinata dalla relazione (11). Nella quale quindi dovrà essere

$$(13) \quad \frac{H}{2 v_0} - \frac{1}{L^2} = \frac{\rho g \sin \alpha}{2 \mu v_0} - \frac{1}{L^2} > 0.$$

Qualora questa disequaglianza non fosse soddisfatta il profilo ellittico non sarebbe possibile, la (12) rappresenterebbe un'iperbole, inammissibile pel nostro problema.

Questa soluzione del problema del movimento di un ghiacciaio è la sola, che sia già stata considerata. Di essa si è servito il sig. Weinberg per la determinazione teorica del coefficiente d'attrito, nel lavoro citato. Dalle formole precedenti si ha infatti

$$(14) \quad \mu = \frac{\rho g \operatorname{sen} \alpha}{2 v_0} \frac{L^2 M^2}{L^2 + M^2}$$

formola che può servire a determinare  $\mu$ , quando siano note  $v_0$  ed  $M$ , cioè la velocità massima superficiale e la profondità massima. Reciprocamente quando siano note  $\mu$  e  $v_0$ , abbiamo per la profondità massima

$$(15) \quad M = \frac{L \sqrt{2 \mu v_0}}{\sqrt{\rho g \operatorname{sen} \alpha L^2 - 2 v_0 \mu}}$$

Per la velocità superficiale media si trova subito

$$v_m = \frac{1}{L} \int_0^L v \, dy = \frac{2}{3} v_0$$

e per la profondità media

$$z_m = \frac{1}{L} \int_0^L z \, dy = \frac{\pi}{4} M = \frac{L \sqrt{3 \mu v_m}}{\sqrt{\rho g \operatorname{sen} \alpha L^2 - 3 v_m \mu}} \frac{\pi}{4}$$

Si ha quindi fra la velocità media e la profondità media una relazione della forma

$$(16) \quad v_m = \frac{a z_m^2}{b + c z_m^2}$$

ove  $a, b, c$  sono costanti, i cui valori risultano dalla formola precedente:

$$a = \rho g \operatorname{sen} \alpha L^2 \quad b = 3 \mu L^2 \frac{16}{\pi^2} \quad c = 3 \mu$$

Le relazioni fra velocità superficiale media e profondità media sono state studiate, in base a dati d'osservazione, da Blümcke A., Hess H. <sup>(1)</sup> e rappresentate mediante una curva che ha l'andamento di quella rappresentata dalla equazione (16), cioè una curva che col crescere della profondità si avvicina assintoticamente alla retta

$$v = \frac{a}{c} = \frac{1}{3} \frac{\rho g \operatorname{sen} \alpha}{\mu} \frac{16}{\pi^2} L^2$$

(<sup>1</sup>) Blümcke u. Hess, *Untersuchungen am Hintereisferner*. Wissenschaftliche Ergänzungshefte zur Zeitschrift des D. u. Oe. Alpenvereins. München, 1899, pag. 64.

IV.

PROFILI DI 3° ORDINE.

Il calcolo del paragrafo precedente non è applicabile, nemmeno in via di approssimazione, quando il massimo della velocità superficiale non cada nel centro della sezione. Anche la curva del profilo non potrà in questo caso essere simmetrica. Può essere utile allora una curva cubica. Potremo porre l'origine ad un estremo della sezione, e la velocità superficiale sarà rappresentata da una funzione di 3° ordine

$$v = \varphi(y) = A_1 y + A_2 y^2 + A_3 y^3$$

a radici reali, che potremo quindi porre senz'altro sotto la forma

$$(17) \quad v = \frac{1}{2} H k y \left(1 - \frac{y}{L}\right) \left(1 - \frac{y}{M}\right)$$

dove con L indichiamo la larghezza del ghiacciaio con M una costante positiva, che potremo sempre supporre maggiore di L, poichè le radici dell'equazione  $\varphi(y) = 0$  essendo 0, L, M, e dovendo M essere esterna all'intervallo (0, L), potremo sempre supporre che la direzione positiva dell'asse y sia quella da 0 ad M. La k è pure una costante che determineremo in seguito, al pari di M. Abbiamo quindi due costanti di cui disporre, in base ai dati d'osservazione, nella espressione della velocità superficiale.

Ciò posto, dalle considerazioni generali precedenti risulta subito per l'espressione della velocità u la formola seguente, ove N è una nuova costante,

$$(18) \quad u = \frac{1}{2} H k \left\{ y - \left( \frac{1}{L} + \frac{1}{M} \right) y^2 - \frac{z^2}{N} + \frac{1}{LM} (y^3 - 6 y z^2) \right\}$$

colla condizione

$$(19) \quad \frac{1}{L} + \frac{1}{M} + \frac{1}{N} = \frac{1}{k}$$

poichè deve essere soddisfatta l'equazione

$$A_3 u = -H.$$

Il profilo è rappresentato in questo caso da una cubica e l'equazione  $u = 0$  ci dà allora subito per la profondità z in un punto qualsiasi y della sezione, la formola assai semplice

$$(20) \quad z^2 = N \frac{y(y-L)(y-M)}{6Ny + LM}.$$

Conviene ora esaminare come possano essere determinate le costanti che compaiono nelle formole precedenti mediante i dati delle osservazioni.

La cubica, rappresentata dalla (17), ci dà la *curva della velocità superficiale* la quale è composta di un unico ramo, attraversa l'asse delle  $y$  nei punti  $y = 0, L, M$  e ci dà un arco posto dalla parte delle  $v$  positive, che è quello che corrisponde ai dati osservati. Per l'angolo  $\omega$  della tangente coll'asse  $y$  abbiamo

$$\operatorname{tg} \omega_y = \frac{dv}{dy} = \frac{1}{2} H k \left( 1 - 2 \left( \frac{1}{L} + \frac{1}{M} \right) y + \frac{3y^2}{LM} \right)$$

quindi nei due punti estremi della sezione

$$\operatorname{tg} \omega_0 = \frac{1}{2} H k \quad \operatorname{tg} \omega_L = \frac{1}{2} H k \left( \frac{L}{M} - 1 \right).$$

Siccome i due angoli  $\omega_0, \omega_L$  possono essere direttamente misurati sulla curva.

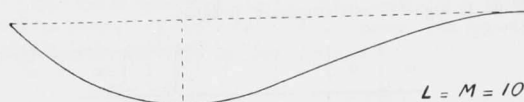


FIG. 3 (Curva della velocità).

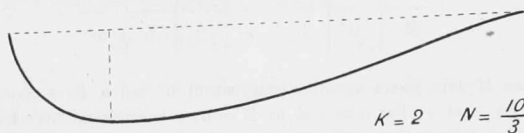


FIG. 4 (Profilo).

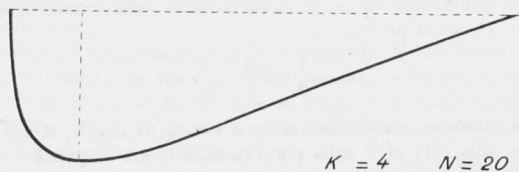


FIG. 5 (Profilo).

della velocità superficiale, così, quando ne sia ammissibile una rappresentazione colla cubica, le due relazioni precedenti danno i valori di  $k$  e di  $M$ . La (19) determinerà  $N$  e tutto allora sarà noto nella formola (20) che dà il profilo del fondo.

Per  $M = L$  si ha  $\omega_L = 0$ , cioè la curva-velocità è tangente all'asse della sezione. È questa una particolarità che si osserva in qualcuna delle curve rilevate e le formole in questo caso possono determinare le proprietà del profilo, a cui corrisponde questa particolarità (v. fig. 3).

Ma la determinazione delle costanti può farsi anche, e sarà più utile dal punto di vista pratico, mediante la posizione del massimo della velocità superficiale, ed il valore di questo massimo di velocità.

Poniamo  $y = \alpha L$ ; il valore di  $\alpha$  corrispondente al massimo di  $v$  è dato dall'equazione

$$3\alpha^2 \frac{L}{M} - 2\left(1 + \frac{L}{M}\right)\alpha + 1 = 0$$

da cui

$$(21) \quad \frac{M}{L} = \frac{3\alpha^2 - 2\alpha}{2\alpha - 1} = \psi(\alpha).$$

Questa formola dà  $M$  quando sia nota la posizione del massimo, cioè  $\alpha$ . Ora si ha la seguente corrispondenza di valori

$\alpha$	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	1	$\infty$
$\psi(\alpha)$	0	1	$\infty$	0	1	$\infty$
$M$	0	$L$	$\infty$	0	$L$	$\infty$

Siccome  $M$  deve essere uguale o maggiore di  $L$ , così  $\alpha$  dovrà essere compreso fra  $\frac{1}{3}$  ed  $\frac{1}{2}$ . Per  $\alpha = \frac{1}{3}$  si ha  $M = L$ , e la curva-velocità è tangente alla linea della sezione nell'estremo  $y = L$ .

Per  $\alpha = \frac{1}{2}$  si ritorna al caso del profilo ellittico già considerato.

Se indichiamo con  $v_M$  il valore massimo della velocità superficiale dalla (17) risulta per la (21)

$$(22) \quad v_M = \frac{1}{2} H k \frac{(1 - \alpha)^2}{2 - 3\alpha} \alpha L.$$

Questa relazione, quando siano misurati  $\alpha$  e  $v_M$ , ci darà  $k$ ;  $M$  sarà determinato dalla (21) ed  $N$  dalla (19). Possiamo quindi concludere:

*Quando nella curva-velocità superficiale si ha un massimo che non è nel punto di mezzo della sezione, e disto da un estremo non meno di un terzo della lunghezza della sezione, sarà possibile una rappresentazione della velocità stessa mediante un arco di una curva di 3° ordine, ed il profilo corrispondente sarà dato pure da una curva di 3° ordine, rappresentata dalla equazione (20).*