ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA NAZIONALE

DEI LINCEI

ANNO CCCXVIII.

1921

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXX.

1° Semestre.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1921

Matematica. — *Sulla teoria degl' integrali semplici di 1ª specie appartenenti ad una superficie algebrica.* Nota VII del Corrisp. Francesco Severi.

16. Il teorema con cui si chiude la Nota VI [1] offre un criterio di equivalenza algebrica di due curve C_1, C_2. Ho già dato in passato (Math. Annalen, 1906) due altri criterî per la dipendenza algebrica di curve tracciate sopra una superficie; e cioè:

1) *Un criterio geometrico*: La condizione necessaria e sufficiente affinchè le due curve C_1, C_2, dello stesso ordine, tracciate sulla superficie F, sieno algebricamente dipendenti, per modo che risulti:

$$\lambda C_1 \equiv \lambda C_2 \text{ (per } \lambda \text{ intero conveniente),}$$

è che sieno soddisfatte le condizioni aritmetiche:

$$[C_1, C_1] = [C_1, C_2] = [C_2, C_2],$$

ove $[C_1, C_1]$, $[C_2, C_2]$ sono i gradi virtuali di C_1, C_2 e $[C_1, C_2]$ il numero dei punti ad esse comuni.

2) *Un criterio trascendente*: La condizione necessaria e sufficiente per l'equivalenza algebrica delle C_1, C_2, aventi lo stesso ordine, è che esista su F un integrale semplice di 3ª specie, il quale possegga le sole curve logaritmiche C_1, C_2.

Il criterio 2) costituisce il ponte di passaggio fra la mia teoria della base per la totalità delle curve algebriche tracciate sopra una superficie algebrica F ed il teorema fondamentale di Picard concernente il minimo numero di curve di F, che possono assegnarsi ad arbitrio come curve logaritmiche d'un integrale semplice di 3ª specie.

Orbene, *il criterio trascendente del n. 15 costituisce il ponte di passaggio fra la teoria della base e la nozione di curve primitive introdotta da Poincaré.* È ciò che ci proponiamo di mostrare nel numero successivo.

17. Su F sieno tracciate t curve algebriche $C_1, C_2, \dots, C_t$. Sieno $s_{1i}, s_{2i}, \dots, s_{ti}$ le somme fornite dall' integrale u_{q+i} $(i = 1, \dots, p-q)$ rispettivamente nei gruppi $(C_1, A), (C_2, A), \dots, (C_t, A)$. Cerchiamo sotto quali condizioni è possibile determinare t numeri interi $\mu_1, \dots, \mu_t$ (positivi, negativi o nulli, ma non tutti nulli), tali che per ogni curva A del fascio $|A|$,

[1] Questi Rendiconti, pag. 328.

considerato nel n. 15, sussistano le relazioni:

$$(25) \qquad \mu_1 s_{1i} + \cdots + \mu_t s_{ti} \equiv 0 \ (\text{modd. } 2p \text{ periodi non ridotti}) \quad (i = 1, 2, \ldots, p-q).$$

Circolando attorno ad un valor singolare $y = b$ la somma s_{ji} aumenta di $\lambda_{ji}\,\omega_i(y)$, ove λ_{ji} è un conveniente intero ed $\omega_i(y)$ è il periodo di u_{q+i} al ciclo nullo τ avvolgente i due punti critici ξ_1, ξ_2, che tendono al punto di contatto del pian tangente $y = b$, col tendere di y a b (n. 10, Oss. 2ª). Sicchè, se è possibile di scegliere gl'interi $\mu_1, \ldots, \mu_t$ non tutti nulli, in guisa tale che sia:

$$\lambda_{1i}\,\mu_1 + \cdots + \lambda_{ti}\,\mu_t = 0 \qquad (i = 1, \ldots, p-q),$$

l'espressione $\sum_j \mu_j s_{ji}$ si conserva olomorfa attorno ad $y = b$.

Analoghi gruppi di equazioni di condizione per $\mu_1, \ldots, \mu_t$ si avranno in corrispondenza agli altri valori singolari di y, qualora si voglia che l'espressione $\sum_j \mu_j s_{ji}$ si conservi olomorfa dovunque, cioè ch'essa riducasi ad una costante. Ora, se t è maggiore del numero $N(p-q)$ delle equazioni di condizione che si vengono così a scrivere — ove N è la classe della superficie F — si potranno di certo determinare valori interi non tutti nulli delle μ soddisfacenti al complesso di quelle equazioni; e così per tali valori delle μ saranno soddisfatte le relazioni:

$$\mu_1 s_{1i} + \cdots + \mu_t s_{ti} \equiv c_i,$$

ove le c_i sono costanti. Ma per $y = \infty$ le somme s_{ji} sono identicamente nulle (n. 6), dunque è $c_i = 0$; e quindi per quei valori non tutti nulli degl'interi μ sono soddisfatte le (25).

Le s_{ji} $(i = 1, \ldots, p-q)$ sono $p-q$ funzioni normali di Poincaré (n. 10, Oss. 3ª), relative alla curva C_j: e precisamente quelle che provengono dagl'integrali $u_{q+1}, \ldots, u_p$.

Le funzioni normali r_{jh} $(h = 1, \ldots, q)$ che provengono dagl'integrali $I_1, \ldots, I_q$, son costanti, definite a meno di multipli interi dei $2q$ periodi ridotti.

Il ragionamento svolto ci dice che, data F, esiste un intero $\varrho \geq 1$, tale che su F si possono tracciare ϱ curve $C_1, \ldots, C_\varrho$, le quali forniscano, rispetto agl'integrali u_{q+i}, somme s_{ji} $(j = 1, \ldots, \varrho)$ linearmente indipendenti, nel senso che non sussista fra esse alcuna relazione del tipo $\sum_j \mu_j s_{ji} \equiv 0$, per valori *interi non tutti nulli* delle μ; ma che data un'altra curva qualsiasi C di F e indicate con s_i le somme fornite da C mediante gl'integrali u_{q+i} $(i = 1, \ldots, p-q)$, sussistano, per valori interi delle $\mu_1, \ldots, \mu_\varrho$, le relazioni:

$$(26) \qquad \mu\, s_i \equiv \mu_1 s_{1i} + \cdots + \mu_\varrho s_{\varrho i} \qquad (i = 1, \ldots, p-q),$$

con $\mu \neq 0$. Si ottiene così il teorema:

Si posson fissare sopra una data superficie F ϱ *curve* $C_1, \dots, C_\varrho$ (*curve primitive*), *ove* ϱ *è un carattere dipendente solo da* F, *tali che le funzioni normali di Poincaré relative ad una curva* C *qualsiasi di* F *e corrispondenti agl'integrali* $u_{q+1}, \dots, u_p$, *i quali provengono dal sistema aggiunto al sistema delle sezioni piane di* F, *si esprimono mediante combinazioni lineari a coefficienti numerici razionali delle analoghe funzioni normali spettanti a* $C_1, \dots, C_\varrho$. *Le altre funzioni normali inerenti a* C *e corrispondenti agl'integrali semplici di 1ª specie* $I_1, \dots, I_q$, *che appartengono ad* F, *riduconsi a costanti.*

Questo è sostanzialmente il risultato di Poincaré. Il criterio del n. 15 ci dice che le curve $C_1, \dots, C_\varrho$ per cui non valgono relazioni del tipo (25) ($t=\varrho$) per valori non tutti nulli delle μ, son curve algebricamente indipendenti, e che ogni curva C di F, in quanto per essa valgano le relazioni (26), con $\mu \neq 0$, è algebricamente dipendente da $C_1, \dots, C_\varrho$. Si ha così di nuovo il teorema fondamentale della teoria della base:

Su F *posson tracciarsi* ϱ *curve algebricamente indipendenti, tali che ogni altra curva di* F *sia algebricamente dipendente da quelle.*

Fisica terrestre. — *Gradiente termico e accelerazione verticale nell'atmosfera.* Nota del Socio Luigi de Marchi.

Nella precedente Nota ho accennato alla necessità di tener conto, nel calcolo del gradiente adiabatico, invece che dell'equazione dell'equilibrio idrostatico, di quella del moto verticale

$$-\frac{\partial p}{\partial z} = \gamma - \alpha\gamma f(w) + \frac{\gamma}{g}\frac{dw}{dt}$$

colla quale l'espressione del gradiente termico verticale sarebbe (prescindendo dagli scambi d'energia coll'esterno)

$$\frac{dT}{dz} = -\frac{A}{c_p}\left[1 + \frac{1}{g}\frac{dw}{dt} - kf(w)\right]. \tag{1}$$

La funzione d'attrito $f(w)$ è ignota; ammettendola, come in altri casi della meccanica, una funzione quadratica della velocità, il termine d'attrito diminuirebbe in ogni caso il gradiente. Invece il termine d'accelerazione lo aumenterebbe in caso di moto ascendente accelerato o discendente ritardato, lo diminuirebbe nei due casi contrarî.

Dato il piccolo valore del coefficiente d'attrito, e il valore generalmente molto piccolo dell'accelerazione verticale rispetto alla g, questi termini di correzione sono comunemente ritenuti trascurabili. È a notare tuttavia che