ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA NAZIONALE

DEI LINCEI

ANNO CCCXVIII.

1921

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXX.

1° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1921

Si posson fissare sopra una data superficie F ϱ *curve* $C_1, \dots, C_\varrho$ (*curve primitive*), *ove* ϱ *è un carattere dipendente solo da* F, *tali che le funzioni normali di Poincaré relative ad una curva* C *qualsiasi di* F *e corrispondenti agl'integrali* $u_{q+1}, \dots, u_p$, *i quali provengono dal sistema aggiunto al sistema delle sezioni piane di* F, *si esprimono mediante combinazioni lineari a coefficienti numerici razionali delle analoghe funzioni normali spettanti a* $C_1, \dots, C_\varrho$. *Le altre funzioni normali inerenti a* C *e corrispondenti agl'integrali semplici di 1ª specie* $I_1, \dots, I_q$, *che appartengono ad* F, *riduconsi a costanti.*

Questo è sostanzialmente il risultato di Poincaré. Il criterio del n. 15 ci dice che le curve $C_1, \dots, C_\varrho$ per cui non valgono relazioni del tipo (25) ($t = \varrho$) per valori non tutti nulli delle μ, son curve algebricamente indipendenti, e che ogni curva C di F, in quanto per essa valgano le relazioni (26), con $\mu \neq 0$, è algebricamente dipendente da $C_1, \dots, C_\varrho$. Si ha così di nuovo il teorema fondamentale della teoria della base:

Su F *posson tracciarsi* ϱ *curve algebricamente indipendenti, tali che ogni altra curva di* F *sia algebricamente dipendente da quelle.*

Fisica terrestre. — *Gradiente termico e accelerazione verticale nell'atmosfera.* Nota del Socio LUIGI DE MARCHI.

Nella precedente Nota ho accennato alla necessità di tener conto, nel calcolo del gradiente adiabatico, invece che dell'equazione dell'equilibrio idrostatico, di quella del moto verticale

$$-\frac{\partial p}{\partial z} = \gamma - \alpha\gamma f(w) + \frac{\gamma}{g}\frac{dw}{dt}$$

colla quale l'espressione del gradiente termico verticale sarebbe (prescindendo dagli scambi d'energia coll'esterno)

$$\frac{dT}{dz} = -\frac{A}{c_p}\left[1 + \frac{1}{g}\frac{dw}{dt} - kf(w)\right]. \tag{1}$$

La funzione d'attrito $f(w)$ è ignota; ammettendola, come in altri casi della meccanica, una funzione quadratica della velocità, il termine d'attrito diminuirebbe in ogni caso il gradiente. Invece il termine d'accelerazione lo aumenterebbe in caso di moto ascendente accelerato o discendente ritardato, lo diminuirebbe nei due casi contrarî.

Dato il piccolo valore del coefficiente d'attrito, e il valore generalmente molto piccolo dell'accelerazione verticale rispetto alla g, questi termini di correzione sono comunemente ritenuti trascurabili. È a notare tuttavia che le misure di velocità verticale, ottenute con lancio di palloni piloti, non permettono una valutazione sicura dell'accelerazione *attuale* in tutti i punti della verticale, ma dànno soltanto valori approssimati dell'accelerazione *media* su tratti di 100, 150 e più metri. Il più breve intervallo fra due osservazioni successive al teodolite è infatti il minuto primo e la velocità ascensionale del palloncino è sempre fra 100 e 200 metri al minuto. Inoltre le misure sono di regola compiute con tempo sereno e aria tranquilla, senza intensi movimenti verticali. Fra le misure a mia disposizione (¹) trovo un solo caso di lancio di pallone con tempo burrascoso (*boïg*) ed è quello di Hergesell del 7 giugno 1913, che diede i seguenti dati medi:

Altezze m.	Velocità ascensionale $^m/_{mi}$	Velocità verticale dell'aria $^m/_{sec}$
0-864	198	+ 1.72 ascendente
864-956	48	— 0.75 discendente
956-1192	236	+ 2.38 ascendente

Essendo la velocità di partenza dal suolo, ove $w = 0$, di 93 $^m/_{mi}$, nel primo strato la velocità assunse valori certo molto maggiori di 200, subendo quindi nel passaggio al secondo un rallentamento pure di oltre 200 (oltre 3 $^m/_{sec}$) che può essersi anche verificato per salto in un brevissimo tratto e in un intervallo di pochi secondi. Lo stesso dicasi, a maggior ragione, per il passaggio dal secondo al terzo strato, dove la variazione di velocità media può essere stata di 300 $^m/_{mi}$ (5 $^m/_{sec}$). Che nell'atmosfera si verifichino salti di velocità verticale, come si verificano per la velocità orizzontale, per la temperatura e per l'umidità, non si può mettere in dubbio, perchè risponde anzitutto al carattere più o meno turbolento dei moti dell'aria. Inoltre una rapida corrente ascendente viene a rallentarsi in alto per l'inerzia degli strati sovrastanti in cui si genera per compressione un gradiente barico efficace $\left(-\frac{\partial p}{\partial z}-\gamma\right)$ discendente. Questo rallentamento può avvenire in modo brusco, come lo dimostra l'espandersi del *pino vulcanico* (²). Ad esso deve corrispondere una diminuzione del gradiente termico, che potrà essere o brusca, determinando uno strato di salto, o lenta, segnando un passaggio più graduale dalle condizioni inferiori dell'aria ascendente a quelle superiori dell'aria ferma. Ciò potrebbe in particolare spiegare i varî tipi di passaggio dalla troposfera alla stratosfera: la brusca inversione di tempera-

(¹) Le misure più rigorose e complete di velocità verticale sono quelle fatte con due teodoliti da Gamba e Viterbi a Pavia (Annali Uff. Centr. Meteor. XXXVI, parte 1ª, 1914) e quelle di Hergesell con un teodolite solo a micrometro e con base graduata pendente dal pallone (Beiträge zur Phys. d. freien Atmosph., vol. VI, 1914, pag. 187).

(²) Wegener A., *Thermodynamik der Atmosphäre*. Leipzig, 1911, pag. 140 seg.- pag. 213.

tura o lo strato a gradiente minore, che si interpone fra l'alta troposfera a forte gradiente e la stratosfera a gradiente nullo ([1]).

Una accelerazione ascendente si determina quando si condensi *improvvisamente* una certa quantità di vapore ([2]) a una certa altezza, come deve verificarsi nel caso di aria soprasatura. Allora per lo sviluppo improvviso di calore si verifica una rapida espansione dello strato condensante con improvviso aumento di tensione interna, che però rapidamente si mette in equilibrio colla pressione esterna p. Siamo come nel caso di una esplosione, nel quale il lavoro esterno dell'unità di peso è $p(v_2 - v_1)$, essendo v_1 il volume specifico iniziale e v_2 il volume finale. Indicando con T_1, T_2 le relative temperature assolute, l'equazione del primo principio è

$$c_v(T_2 - T_1) + Ap(v_2 - v_1) = rq$$

ove q è il peso di vapore condensato nell'unità di peso d'aria, r è il calore di vaporizzazione dell'acqua, c_v il calore specifico a volume costante.

L'aria subisce prima una rapida dilatazione per improvviso aumento della tensione interna, e poi una parziale contrazione per mettersi in equilibrio colla pressione esterna; come risultato finale essa si è dilatata a pressione costante e si potrà scrivere

$$v_2 - v_1 = \alpha v_1 (T_2 - T_1) \quad \text{ossia} \quad T_2 - T_1 = \frac{\gamma_1 - \gamma_2}{\alpha \gamma_2}$$

dove γ_1, γ_2 sono i pesi specifici iniziale e finale, $\alpha = {}^1/_{273}$. L'equazione precedente si può quindi scrivere, ponendo $p = R\gamma_1 T_1$,

$$\left(\frac{c_v}{\alpha} + ART_1\right)(\gamma_1 - \gamma_2) = \gamma_2 rq \,.$$

Ma $\gamma_1 - \gamma_2$ non è che la forza ascensionale che l'unità di volume assume per la dilatazione, e che le imprimerà l'accelerazione (essendo $\frac{\gamma_2}{g}$ la massa dell'unità di volume nell'aria dilatata):

$$\frac{dw}{dt} = \frac{grq}{273\,(c_v + A\,R\alpha\,T_1)}$$

o, approssimativamente, dato che la temperatura si scosti non molti gradi dallo 0°, com'è nelle nubi basse e medie,

$$\frac{dw}{dt} = \frac{grq}{273 \cdot c_p} \,. \tag{2}$$

([1]) Schmauss A., *Die Substratosphäre* (Beiträge zur Phys. d. freien Atmosp., VI, pag. 153, 1914).

([2]) Nel caso di condensazione progressiva in una corrente d'aria satura si ottiene la formola nota del gradiente in aria satura coi termini di correzione accennati sopra e nella Nota precedente.

Poichè non si può stabilire fino a quale grado di soprasaturazione possa giungere il vapore in una corrente ascendente, non possiamo, per la valutazione di q, che fondarci su apprezzamenti indiretti [1]. Un indizio ci è dato dall'intensità delle piogge temporalesche, che in alcuni casi raggiungono parecchi millimetri e in casi eccezionali parecchi centimetri d'altezza in pochi minuti. Una pioggia di mezzo centimetro rappresenta 5000 gr. per mq. e, supponendo che la nube temporalesca abbia lo spessore di un chilometro, essa rappresenterebbe una condensazione di 5 gr. per metro cubo, ossia, alla pressione di 600 mm., circa 5 gr. per Kg., oltre la massa d'acqua che rimane sospesa nella nube, in goccioline più minute. Possiamo quindi ammettere che il valore di q possa essere, anche in casi non eccezionali, di parecchi grammi. Ponendo $q = 0{,}005$, $r = 607$, $c = 0{,}238$, la condensaziono totale di 5 gr. produrrebbe un'accelerazione verticale ascendente di $0{,}53\ ^{m}/_{sec}$; per valori minori o maggiori di q essa diminuisce o cresce proporzionalmente.

Con tale accelerazione l'unità di volume d'aria si solleverebbe a condensazione compiuta, e continuerebbe ad innalzarsi, con accelerazione sempre minore finchè trova lo strato superiore dove $\gamma = \gamma_2$, oltre il quale continuerebbe ad innalzarsi con moto ritardato. Ponendo

$$\gamma_2 = \gamma_1\, 10^{-\frac{h}{18400}}$$

ove h è il dislivello fra lo strato a peso specifico γ_2 e quello a γ_1, si ha approssimativamente

$$h = 18400 \operatorname{Log} \frac{\gamma_1}{\gamma_2} = 18400 \operatorname{Log} \left(1 + \frac{\alpha r q}{c_p}\right) = 18400 \cdot \mathrm{M} \frac{\alpha r q}{c_p}$$

dove M è il modulo dei logaritmi (0,43429). Per $q = 0.005$ si avrebbe $h = 375$ circa. Poichè nei grandi temporali la pioggia data dal nembo temporalesco è anche due o più volte quella da noi supposta di mezzo centimetro e lo spessore del nembo, nella sua parte inferiore più densa, è minore di un chilometro, la q può ammettersi anche doppia, tripla etc. di

[1] Bisogna tener conto del fatto che la condensazione in una massa d'aria satura o soprasatura è limitata dal calore da essa sviluppato. Si leggano in proposito le belle Memorie 3ª e 4ª di von Bezold sulla Termodinamica dell'atmosfera (Sitzungsberichte Akad. Berlin, 1890, 1892; Abhandlungen, Braunschweig 1906) dove è data una costruzione grafica per il calcolo della q in corrispondenza a varî gradi di soprasaturazione. A 600 mm. di pressione (circa 2000 m. d'altezza) una massa d'aria a 0° contenente 8, 9, 10, 11 gr. di vapore per chilogrammo ne condenserebbe rispettivamente solo 1,5; 2; 2,5; 3 circa. Rimane tuttavia a dimostrare la possibilità che il vapore si mantenga soprasaturo nell'aria ricca di pulviscolo: il Bezold (Abhandl. pp. 191-192) ne dà qualche indizio. Bisogna anche osservare che l'interposizione di nubi può, arrestando la radiazione solare, determinare improvvisi abbassamenti di temperatura e quindi rapide condensazioni anche senza soprasaturazione.

quella supposta e il dislivello h superare anche sensibilmente il chilometro. L'aria impiega parecchi minuti a percorrerlo, nei quali può assumere velocità verticali anche di parecchie decine di metri al secondo. Ciò nell'ipotesi che il movimento possa svolgersi senza impedimenti: in realtà esso provocherà moti vorticosi coll'aria ambiente. Così si spiegano e la rapida spinta dei cumuli verso l'alto, e i moti turbolenti che in essi si generano, e le velocità verticali sopra gli 8 $^{m}/_{sec}$ necessarie per mantenere in sospensione le gocce più grosse, e per spezzarle generando, secondo la teoria di Simpson, la separazione delle elettricità e gli alti potenziali elettrici.

Le accelerazioni così generate non possono avere effetto sensibile sul gradiente termico verticale; non così il ritardo successivo che deve avvenire in modo molto rapido, spesso brusco, per l'inerzia degli strati sovrastanti. Già prima che arrivi la colonna ascendente questi, non cedendo abbastanza presto, sono compressi e spinti verso l'alto oltre il limite di condensazione del vapore che contengono, come dimostra la formazione delle *cappe* al di sopra e a qualche distanza dalla testa del cumulo ([1]). Questa compressione degli strati superiori deve generare un gradiente verticale discendente, che rallenta il moto ascensionale sottostante, il quale però è talvolta così energico che riesce ad attraversare la cappa e a sollevarsi centinaja e migliaja di metri sopra di essa. I netti lineamenti superiori dei cumuli che spesso hanno forma turrita, a piattaforma ([2]), dimostrerebbero però un brusco arresto del moto ascendente, al quale corrisponde un'accelerazione negativa che può essere di parecchi metri al secondo. Essa determinerebbe, in base alla (1), una brusca diminuzione del gradiente termico verticale, e forse anche una inversione di temperatura quale si verifica spesso al di sopra delle nubi.

([1]) Wegener, *Thermodynamik der Atmosphäre*, pp. 213, 217 seg.; Crestani, *Le Cappe* (Bollett. bimens. della Soc. Meteor. ital., 1918).
([2]) Ibid., pag. 208, tavv. VII, VIII.