ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA NAZIONALE

DEI LINCEI

ANNO CCCXVIII.

1921

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXX.

1° Semestre.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1921

dei nodi d'intersezione delle *Hexactiniae* maggiori e minori nelle parti probabilmente dermali o gastrali. Questo intreccio apparisce più irregolare intorno ai canali acquiferi: nel rimanente è abbastanza regolare.

Per entro alle sezioni sottili lo si vede meglio, secondo il solito, specialmente quello più minuto, nelle parti limonitiche, essendo le Spicole trasformate in Pirite, quindi in Limonite.

A volte la Limonite, come il Quarzo e la Sericite occupano le parti centrali delle maglie costituite da Silice colloide, la qual cosa si vede bene al Polariscopio a Nicols incrociati. Solite piccole Epirhize con reticolo circostante a losanghe schiacciate trasversali, in serie alternanti a quinconce con Aporhize circolari, talora in mezzo ad intreccio formato da minutissime maglie con forellini circolari come alla costa di S. Alberto.

MEMORIE E NOTE PRESENTATE DA SOCI

Matematica. — *Sulla « piccola variazione » di una curva piana algebrica reale*. Nota di LUIGI BRUSOTTI, presentata dal Corrisp. L. BERZOLARI [1].

1. Sia C^n una *curva piana algebrica reale* (d'ordine n) che non abbia altre singolarità all'infuori di punti doppî ordinarî. Fra tali punti doppî quelli reali saranno nodali od isolati.

La parte reale di C^n sarà una *curva grafica* Γ, composta in generale di circuiti e di punti isolati. I punti doppî nodali saranno o doppî per un circuito o comuni a due circuiti distinti.

È noto allora [2] che cosa si intenda per « *piccola variazione* » *topologica* di Γ, nel senso più largo qui usato, nel senso cioè che essa conservi eventualmente alcuni dei punti doppî, sciogliendo soltanto i rimanenti.

Non risulta peraltro se una « piccola variazione » topologica di Γ topologicamente individuata possa sempre tradursi in una « *piccola variazione* » *algebrica* di C^n, cioè se la trasformata Γ_1 di Γ sia sempre topologicamente identificabile colla parte reale di una curva algebrica reale C_1^n d'ordine n, la quale giaccia in un sistema algebrico reale (per esempio in un fascio reale) contenente la C^n, e nell'intorno reale di questa.

Il quesito fu già da me posto e risolto affermativamente in un caso particolare, quando cioè la C^n si spezzi in componenti prive di punti doppî

[1] Presentata nella seduta del 6 febbraio 1921.

[2] Brusotti, *Sulla generazione di curve piane algebriche reali mediante « piccola variazione » di una curva spezzata* [Annali di Matematica, serie 3ª, tomo 22 (1913), pp. 117-169]; *Sui fasci di curve grafiche* [Succ. Bruni, Pavia, 1919, pp. 1-204].

reali ed i punti doppî reali di C^n vengano tutti sciolti dalla « piccola variazione » topologica assegnata, riuscendo anzi in questo caso la « piccola variazione » algebrica effettuabile in un fascio del quale venne pure indicata la costruzione (¹).

Qui fondandomi sopra un metodo di rappresentazione iperspaziale, che mi sembra non privo di interesse per la sua semplicità, giungo a rispondere, sempre in senso affermativo, al quesito più generale, risolvendo così esaurientemente una questione che si può ritenere fondamentale nello studio della « piccola variazione ».

2. Premetto alcune osservazioni di carattere puramente algebrico e indipendenti da considerazioni di realità.

Si rappresentino le curve piane di ordine n coi punti di uno spazio lineare S_r ad $r = \frac{1}{2} n(n+3)$ dimensioni. I punti-immagine di curve dotate di punto doppio sono i punti di una ipersuperficie V d'ordine $3(n-1)^2$.

Un punto P semplice per V sarà immagine di una curva dotata di un sol punto doppio ordinario M.

Si ricordi che, in un fascio di curve piane d'ordine n, una curva avente punto doppio ordinario in un punto-base semplice è da contarsi due volte fra le $3(n-1)^2$ curve del fascio dotate di punto doppio. Ne segue che l'iperpiano tangente a V in P è l'immagine del sistema lineare ∞^{r-1} delle curve piane d'ordine n passanti semplicemente per M (²).

3. Più in generale se una curva piana C^n d'ordine n possiede d punti doppî ordinarî $M_1, M_2, \ldots, M_d$, il suo punto-immagine P sarà d-plo per V. Anzi esso sarà d-iperplanare, essendo gli iperpiani tangenti in P alle d falde le immagini dei d sistemi lineari ∞^{r-1} delle curve piane d'ordine n passanti rispettivamente per $M_1, M_2, \ldots, M_d$.

Si osservi ora che *il sistema delle curve d'ordine n aggiunte a C^n è regolare* (³), ossia che il passaggio semplice di una curva piana di ordine n

(¹) *Sulla generazione* ecc. (cit.), § 9, § 10.

(²) Ne segue pure, ma qui non occorre, che un iperpiano tangente a V la tocca lungo un S_{r-3}, immagine del sistema lineare ∞^{r-3} di curve piane d'ordine n passanti doppiamente per uno stesso punto M.

(³) Proprietà nota per C^n irriducibile; cfr. Bertini, *La geometria delle serie lineari sopra una curva piana secondo il metodo algebrico* [Annali di Matematica, serie 2ª, tomo 22 (1894), pp. 1-40]; n. 17. Basterà dunque provare che se l'affermazione vale per C^n spezzata in h componenti irriducibili, essa vale per C^n spezzata in $h+1$. Sia $f \equiv f_1 f_2 = 0$ l'equazione di C^n, essendo $f_1 = 0$ (d'ordine n_1) spezzata in h di dette componenti ed $f_2 = 0$ (d'ordine n_2) la rimanente. Per il teorema di Noether $Af + B\varphi$ nel caso semplice, il sistema delle aggiunte d'ordine n a C^n è:

$$A_2 f_1 + A_1 f_2 = 0 \tag{1}$$

ove $A_i = 0$ varii comunque nel sistema delle aggiunte d'ordine n_i ad $f_i = 0$. Ma (1) è per i d punti doppî di C^n equivale a d condizioni lineari indipendenti. Ciò per la rappresentazione iperspaziale si traduce nel fatto che *i d iperpiani tangenti in* P *alle d falde di* V *hanno in comune un* S_{r-d} *e non uno spazio di maggior dimensione.* Ne segue che d' iperpiani comunque scelti fra essi hanno in comune un $S_{r-d'}$ e non uno spazio di maggior dimensione.

4. Suppongo che, nella rappresentazione in S_r, curve reali abbiano punti-immagine reali.

Osservo che la parte reale di V consterà allora di una varietà Ω (ad $r-1$ dimensioni reali) costituita dai punti-immagine delle curve reali dotate di punto doppio reale e di una varietà doppia isolata (ad $r-2$ dimensioni reali) costituita dai punti-immagine delle curve reali dotate di coppia di punti doppî immaginario-coniugati. Da questa varietà doppia isolata che non ha alcun riferimento coll'aspetto delle curve piane si potrà nel seguito prescindere.

Ciò posto, sia C^n reale e dotata di $\delta > 0$ punti doppî reali $M_1, M_2, \ldots, M_\delta$. Il suo punto-immagine sarà un punto P nel quale s'incrociano δ falde $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_\delta$ di Ω. I δ iperpiani $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_\delta$ tangenti in P ad Ω lungo le falde $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_\delta$ hanno in comune (n. 3) un $S_{r-\delta}$ e non uno spazio di maggior dimensione.

5. Si applichi alla parte reale Γ di C^n una « piccola variazione » topologica *che sciolga tutti i δ punti doppî*. Nell'intorno di uno M_i di questi, la « piccola variazione » potrà avere l'uno o l'altro di due opposti comportamenti [comportamenti *complementari* (¹)]. Invero, se M_i è nodale, ordinati ciclicamente intorno ad esso i quattro elementi di Γ che ne escono, potrà la « piccola variazione » raccordare il primo elemento col secondo (ed il terzo col quarto), oppure raccordare il primo col quarto (ed il secondo col terzo); se poi M_i è isolato, esso potrà nella « piccola variazione » produrre un circuito, oppure svanire senza traccia. E si hanno così 2^δ tipi topologicamente distinti di « piccola variazione ».

Se si applica a C^n una « piccola variazione » algebrica, alla scelta fra i due aspetti complementari della relativa « piccola variazione » topologica nell'intorno di M_i corrisponde in S_r il fatto che il punto P_1 immagine della trasformata C_1^n si può prendere nell'intorno reale di P dall'una o dall'altra banda della falda μ_i.

Ora nell'intorno reale di P le δ falde μ_i si comportano topologicamente come i δ iperpiani tangenti τ_i, e, poichè questi si tagliano precisamente in

---

pure il sistema lineare al quale *appartengono* i sistemi $A_2 f_1 = 0$, $A_1 f_2 = 0$, i quali hanno in comune la sola $f = 0$. Calcolando sotto questo aspetto la dimensione di (1) e tenendo presente l'ipotesi pel caso di h componenti irriducibili, si deduce facilmente che (1) è regolare, come appunto si voleva.

(¹) *Sulla generazione* ecc. (cit.), § 2; *Sui fasci di curve grafiche* (cit.), § 4.

un $S_{r-\delta}$, le falde stesse dànno luogo ad una ripartizione dell'intorno in 2^δ distinte regioni, ciascuna delle quali risponde ad una delle 2^δ scelte che si possono fare sulla posizione di P_1 in rapporto alle μ_i (¹).

Si assegni perciò comunque la « piccola variazione » di Γ fra le 2^δ topologicamente distinte. Sarà sempre individuabile nell'intorno reale di P una delle 2^δ regioni in modo tale che, condotto in essa (com'è lecito) con estremo in P un segmento di retta, ad ogni spostamento del punto-immagine a partire da P su quel segmento corrisponda una « piccola variazione » di C^n effettuabile in un fascio e topologicamente equivalente alla « piccola variazione » topologica assegnata.

Concludendo: *Se la « piccola variazione » topologica di* $\boldsymbol{\Gamma}$ *scioglie tutti i* δ *punti doppi, essa può tradursi in una « piccola variazione » algebrica di* C^n *effettuabile entro un fascio (reale).*

6. Si applichi ora alla parte reale $\boldsymbol{\Gamma}$ di C^n una « piccola variazione » che sciolga $\alpha < \delta$ punti doppî assegnati $M_1, M_2, \ldots, M_\alpha$ e mantenga i rimanenti β $(\alpha + \beta = \delta)$ lasciandoli fissi o mutandoli in punti doppî prossimi. Si avranno 2^α tipi topologicamente distinti.

Una « piccola variazione » algebrica di C^n topologicamente identica alla « piccola variazione » topologica assegnata dovrà rappresentarsi in S_r con uno spostamento del punto-immagine a partire da P sulla varietà ω (ad $r - \beta$ dimensioni reali) intersezione delle β falde μ_h $(h = \alpha + 1, \alpha + 2, \ldots, \alpha + \beta)$, spostamento in cui il punto si muova tenendosi dalla banda opportuna rispetto a ciascuna delle α falde μ_k $(k = 1, 2, \ldots, \alpha)$.

Uno spostamento su ω può avvenire sotto questo aspetto appunto in 2^α diverse maniere. Invero sulla ω le α falde μ_k operano in modo topologicamente identico a quello con cui operano gli α iperpiani τ_k sullo spazio σ (ad $r - \beta$ dimensioni) intersezione dei β iperpiani τ_h. Ora gli α iperpiani τ_k tagliano σ secondo altrettanti spazî ad $r - \beta - 1$ dimensioni aventi in comune precisamente un $S_{r-\delta}$ ed, essendo $r - \delta = (r - \beta) - \alpha$, determinano in σ nell'intorno reale di P precisamente 2^α regioni.

Coll'intervento di un *segmento di curva algebrica* uscente da P e giacente su ω nella opportuna regione, sarà agevole riprendere il procedimento del n. 5, concludendo che *ogni « piccola variazione » topologica di* $\boldsymbol{\Gamma}$ *si può tradurre in una « piccola variazione » algebrica di* C^n.

È così raggiunto lo scopo principale della presente Nota.

7. Se però la « piccola variazione » algebrica si vuole effettuare *entro*

(¹) Se, anzichè alle falde μ_i, si fa riferimento agli iperpiani τ_i, le 2^δ regioni corrispondono alle 2^δ scelte per i segni delle prime δ coordinate cartesiane di un punto, quando P (supposto proprio) si assuma come origine e i primi δ iperpiani coordinati si faccian coincidere cogli iperpiani τ_i.

un fascio [che suppongo *privo di parti fisse* (¹)], per un noto teorema di Bertini (²) dovranno mantenersi fissi i β punti doppî M_h $(h = \alpha + 1, \alpha + 2, \ldots, \alpha + \beta)$.

Con θ_h $(h = \alpha + 1, \alpha + 2, \ldots, \alpha + \beta)$ si indichi lo spazio ad $r - 3$ dimensioni immagine in S_r del sistema delle curve piane di ordine n aventi punto doppio in M_h e con θ, quando esista, lo spazio a $t > 0$ dimensioni, intersezione degli spazî θ_h. Nell'ipotesi fatta, alla « piccola variazione » dovrà corrispondere uno spostamento del punto-immagine sopra un segmento di retta uscente da P e giacente in θ.

Ora perchè ciò sia possibile *comunque si fissi la « piccola variazione » topologica*, basta ed occorre che *gli iperpiani* τ_k $(k = 1, 2, \ldots, \alpha)$ *taglino* θ *in altrettanti spazî a* $t - 1$ *dimensioni aventi in comune precisamente un* $S_{t-\alpha}$, ossia che *le curve piane d'ordine* n *passanti doppiamente per i* β *punti* M_h *costituiscano un sistema lineare* ∞^t *entro il quale quelle passanti semplicemente per gli* α *punti* M_k *formino un sistema lineare precisamente* $\infty^{t-\alpha}$.

La condizione è dunque puramente algebrica.

Agronomia. — *La solubilità della Leucite nel terreno agrario.* Nota del prof. G. de Angelis d'Ossat, presentata dal Socio R. Pirotta (³).

I fratelli Rogers (1848), per primi, affermarono la solubilità della leucite nell'acqua. Posteriormente parecchi dimostrarono che la leucite nel terreno agrario mette a disposizione delle piante la potassa che contiene; fra costoro debbonsi, per ora, ricordare Clarke (1895-1900), Gigtioli (1899), Steiger (1900), Paternò (1900), Ampola (1903), Monaco (1903-1912), Caruso (1905), Casoria (1906), Ampola e De Grazia (1906), De Grazia e Camiola (1906), Angeloni, Bernardini (1908), de Angelis d'Ossat (1910) ed ultimamente Bandini, Nazari, Cecchetti, Felcini, Bonomi, Alvisi (1917), e specialmente Giannobi ecc. La scomposizione della leucite è facilitata da parecchi agenti, i quali sono quasi sempre presenti nel terreno agrario, come:

(¹) In generale il fascio non potrà avere parti fisse. Se però la C^n è riducibile e tutti i punti doppî di C^n che siano semplici o doppî per una sua componente sono fra i β da conservarsi, tale componente potrà anche mantenersi fissa. In tal caso le considerazioni che seguono si intenderanno riferite alla parte mobile.

(²) Bertini, *Sui sistemi lineari* [Rendiconti del R. Istituto lombardo, serie 2ª, vol. 15 (1882), pp. 24-28]; oppure *Introduzione alla geometria proiettiva degli iperspazî* [Spoerri, Pisa, 1907, pag. 227].

(³) Presentata nella seduta del 6 febbraio 1921.