# ATTI

DELLA

# REALE ACCADEMIA NAZIONALE

# DEI LINCEI

ANNO CCCXVIII.

1921

---

SERIE QUINTA

---

## RENDICONTI

---

**Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.**

---

**VOLUME XXX.**

1° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1921

gr. 0,2646 di sostanza dettero gr. 0,5869 di anidride carbonica e gr. 0,0956 di acqua;
gr. 0,0566 di sostanza dettero 17,3 cc. di azoto a 17° e 760 mm.;
trovato % C = 60,77; H = 4,07; N = 35,45;
calcolato per la fenilenciangnanidina C = 60,75; H = 3,79; N = 35,44.

Una parte della fenilenciangnanidina così ottenuta sciolta in acqua e potassa secondo le indicazioni di P. e G. (loc. cit., pag. 180) per azione del bromuro di cianogeno fu trasformata in fenilendiciangnanidina identica a quella ottenuta dalla fenilidrazina. Come metodo pratico di preparazione credo però sia preferibile quello dalla fenilidrazina.

In una prossima Nota riferirò sopra esperienze eseguite con successo per generalizzare la reazione dell'acido nitroso sopra altri composti guanidici.

## Matematica. — *Saggi d'una teoria geometrica delle forme binarie.* IV: *Rappresentazione tipica dei covarianti.* Nota di Annibale Comessatti, presentata dal Corrisp. F. Severi [1].

13. Il problema di raccogliere l'insieme delle forme invariantive dedotte da una o più forme originarie, in un campo di razionalità o d'integrità a base finita, può, per la sua importanza, e per il vasto contributo apportatovi da eminenti Autori, considerarsi come fondamentale per la teoria che ci occupa.

Prima che Gordan, nel 1868, pervenisse a stabilire l'esistenza di *sistemi completi di forme invariantive* inerenti ad una data binaria $f$, mediante le quali tutte le altre si esprimono in modo razionale intero, un passo importante, nel dominio di razionalità, era stato fatto da Hermite mediante la *rappresentazione tipica* [2].

Il teorema di Hermite stabilisce che ogni covariante (ed invariante) di $f$ è eguale ad una funzione intera di $f$ e di certi $n-1$ covarianti $\Phi_2, \Phi_3, \ldots, \Phi_n$ *divisa* per una potenza della $f$ stessa. Esso è stato successivamente perfezionato da Clebsch che sostituì al primitivo sistema dei *covarianti associati* (ad $f$) di Hermite, altri sistemi notevolmente più semplici [3].

Nel nostro ordine di vedute, i problemi accennati s'interpretano come inerenti alla ricerca d'una *base* per le *ipersuperficie o forme seminvarianti*,

[1] Presentata nella seduta del 16 dicembre 1920.

[2] Hermite, *Second Mémoire sur les fonctions homogènes à deux indéterminées* [Journal für Mathematik, LII (1856), pp. 18-38], § III.

[3] Cfr. Clebsch, *Binären Formen* (cit.), Cap. VII.

intendendo come tali quelle forme dello $S_n(a_0, a_1, \dots, a_n)$ che si ottengono eguagliando a zero un seminvariante di $f$. E invero, come segue dal teorema di Bruno dimostrato al n. 5, ogni relazione algebrica tra seminvarianti produce una relazione formalmente identica tra i relativi covarianti, e viceversa.

È da una tale concezione del problema, convenientemente trasformata ed elaborata, che mi propongo di dedurre in questa Nota la rappresentazione tipica dei covarianti.

14. Riprendiamo la considerazione del *gruppo* $\Omega$ *delle similitudini* di $C^n$ che caratterizza i seminvarianti di $f$. Diremo che due punti P e Q di $S^n$ sono *equivalenti* rispetto a tal gruppo, se esiste in esso qualche trasformazione *non degenere* che muta P in Q.

L'insieme dei punti di $S_n$ equivalenti ad un generico punto P, inclusivi per ovvie ragioni d'algebricità anche i punti limiti di successioni di punti equivalenti a P [1], è una superficie algebrica F variabile in un sistema algebrico $M, \infty^{n-2}$, d'indice 1.

Una ipersuperficie seminvariante $\Delta_U$ di $S_n$, contiene ovviamente la F passante per un suo punto generico; sicchè se le F si concepiscono come elementi d'una varietà $W_{n-2}$ (*algebrica*, anzi, come vedremo tra poco, *razionale*) la $\Delta_U$ è ivi rappresentata da una $V_{n-3}$, e viceversa ad ogni $V_{n-3}$ di W (escluse eventualmente convenienti $V_{n-3}$ *fondamentali*) corrisponde un seminvariante di $f$.

Possiamo anche sostituire alla W l'*involuzione* segata dalle F sopra una $V_{n-2}$ di $S_n$, ad esempio sopra uno spazio lineare $S_{n-2}$; la determinazione dei seminvarianti di $f$ si riduce allora a quella delle $V_{n-3}$ *appartenenti* a tale involuzione.

15. Indichiamo con S uno spazio $S_{n-2}$ passante per lo $S_{n-3}$ osculatore a $C^n$ in U e non contenuto nello $S_{n-1}$ osculatore $a_0 = 0$. Assunto questo $S_{n-3}$ come spazio improprio entro S coll'introduzione di coordinate non omogenee $z_i = \frac{a_i}{a_0}$, le equazioni di S saranno del tipo $z_1 = m_1$, $z_2 = m_2$.

Tenendo conto delle equazioni di $\Omega$, che, a norma del n. 2, si possono scrivere p. es. sotto la forma

$$(8) \qquad \lambda^i z'_i = \sum_{h=0}^{i} \binom{i}{h} z_h \mu^{i-h}, \qquad (i = 1, 2, \dots, n \; ; \; z_0 = 1),$$

($\lambda, \mu$ parametri), si stabiliscono facilmente le proprietà seguenti:

*a*) Se non è $m_1^2 - m_2 = 0$, cioè se S non è uno spazio generatore del *cono seminvariante hessiano* $a_0 a_2 - a_1^2 = 0$, esiste una ed una sola

[1] L'omologo di P per una trasformazione degenere di $\Omega$ può essere indeterminato, ma non lo è se quella trasformazione si considera come limite d'una trasformazione non degenere, per una variazione continua dei parametri.

trasformazione di $\Omega$ che muta un punto proprio P di S in un altro punto (non dato) di S, e questa è l'involuzione di $\Omega$ corrispondente ai valori $\lambda = -1$, $\mu = -2m$, dei parametri;

*b*) ogni punto proprio d'un generico S è equivalente a *due* ben determinati punti pure proprî d'un altro S generico.

Dalla *a*) segue che ogni F del sistema M, sega S, fuori di punti fissi (improprî) in *due* punti coniugati in una involuzione $I_2$ generata da una proiettività involutoria (e perciò *razionale*). Se in particolare, come faremo in seguito, si pone $m_1 = 0$, $m_2 = 1$ le equazioni della proiettività generante $I_2$, che si ottengono dalla (8) per $\lambda = -1$, $\mu = 0$, sono

$$z'_i = (-1)^i z_i, \qquad (i = 3, 4, \dots, n). \tag{9}$$

L'osservazione *b*) permette di determinare quali sono le forme seminvarianti che segano un prefissato S generico soltanto in punti improprî. In forza della *b*) esse devono comportarsi analogamente rispetto agli altri S generici, e quindi son *coni* aventi per vertice lo $S_{n-3}$ osculatore a $C^n$ in U, cioè corrispondono a covarianti $n-2$ conici. Tali covarianti sono *proiezioni* (n. 6) di covarianti delle forme quadratiche e quindi si riducono alla *forma*, all'*hessiano* o a prodotti di loro potenze intere e positive; di guisa che i seminvarianti cercati sono del tipo $a_0^\alpha (a_0 a_2 - a_1^2)^\beta$.

16. Sia ora $\Phi$ un covariante di $f$, $\varphi$ il relativo seminvariante. L'ipersuperficie $\varphi = 0$ segherà su $S(z_1 = 0, z_2 = 1)$ una $V_{n-3}$ mutata in sè dalla (9), cioè *appartenente* all'involuzione $I_2$; e viceversa, data una tale $V_{n-3}$, applicando ad essa le trasformazioni di $\Omega$ se ne dedurrà una forma seminvariante $\varphi$.

Ne segue che due seminvarianti i quali seghino su S, fuori d'intersezioni improprie, la stessa $V_{n-3}$ non possono differire che per fattori del tipo $a_0^\alpha (a_1^2 - a_0 a_2)^\beta$, giacchè, per quanto precede, ogni loro parte irriducibile è *individuata* dalla sua intersezione con S, a meno che questa non si riduca allo $S_{n-3}$ improprio.

17. Indichiamo ora con

$$\psi(z_3, z_4, \dots, z_n) = 0, \tag{10}$$

l'equazione della $V_{n-3}$ staccata su S dal seminvariante $\varphi$. Come faremo a dedurne l'espressione di $\varphi$?

Anzitutto converrà tener conto che la (10) dev'essere mutata in sè dalla proiettività (9); e perciò occorre e basta che *in ogni termine della* (10) *il numero dei fattori d'indici dispari abbia la stessa parità.*

Inoltre le considerazioni precedenti suggeriscono di cercare delle formule che esprimano le coordinate d'un punto di S in funzione di quelle del generico punto equivalente di $S_n$. Sostituendo quelle espressioni al posto delle $z$ nel primo membro della (10), e riducendo a forma intera, dovrà

ottenersi, a meno di fattori o divisori del tipo $a_0^\alpha (a_0 a_2 - a_1^2)^\beta$, il cercato seminvariante $\varphi$.

18. A conferma delle previsioni, veniamo agli sviluppi effettivi. Poniamo nelle (8) $z_1 = 1$, $z_2 = 0$, $z_i' = \frac{a_i}{a_0}$, e risolviamole rispetto a $z_3, z_4, \dots, z_n$ *eliminando* $\lambda, \mu$, Avremo con qualche calcolo

$$(11) \qquad z_i = g_i g_2^{-\frac{i}{2}}, \qquad (i = 3, 4, \dots, n),$$

le forme $g_i$ delle variabili $a_i$ essendo date dalle espressioni

$$(12) \qquad g_i = (-1)^i \sum_{h=0}^{i} (-1)^h \binom{i}{h} a_0^{h-1} a_1^{i-h} a_h. \qquad (i = 2, 3, \dots, n).$$

Poichè gli $S_{n-3}$ coordinati $z_3 = 0$, $z_4 = 0 \dots, z_n = 0$ sono mutati in sè dalla (9), così $g_3, g_4, \dots, g_n$ saranno seminvarianti di $f$; e lo stesso può dirsi di $g_2$ giacchè, come si ricava dalla (12) $g_2 = a_0 a_2 - a_1^2$, è il *seminvariante hessiano* di $f$.

Tratteniamoci brevemente su questi seminvarianti, e sui corrispondenti covarianti che indicheremo con $G_2, G_3, \dots, G_n$.

Anzitutto, poichè $g_i$ è di grado e peso uguali ad $i$, dalla formula $m = 2p - nl$ (¹) che dà l'ordine $m$ d'un covariante in funzione del grado $l$, e del peso $p$ del suo termine principale, abbiamo:

*Il covariante* $G_i$ *ha grado* $i$ *ed ordine* $(n-2)i$.

Inoltre poichè $g_i$ non contiene $a_{i+1}, a_{i+2}, \dots, a_n$, così si ha che:

*Il covariante* $G_i$ *è* $n-i$ *conico e si ottiene per proiezione dal covariante analogo delle forme d'ordine* $i$. *L'unico covariante non conico è* $G_n$, *che ha rango* 1.

L'interpretazione geometrica dei covarianti trovati, si riduce dunque a quella di $G_n$, che può così enunciarsi:

*L'ipersuperficie* $\Delta_P$ *relativa al covariante* $G_n$ *è caratterizzata dalle proprietà seguenti*:

1) *È d'ordine* $n$ *ed ha come spazio* $(n-1)$*-plo lo* $S_{n-1}$ *osculatore a* $C^n$ *in* P;

2) *Passa semplicemente per la* $C^n$ *toccandone in ogni punto lo* $S_{n-1}$ *osculatore*. Omettiamo la semplice analisi formale dimostrativa (²).

(¹) Questa formula può dimostrarsi geometricamente, ma ci dispensiamo dal farlo, per brevità.

(²) I nostri covarianti $G_i$ moltiplicati per $f$, dànno i covarianti *associati ad* $f$ di Hermite. Cfr. i termini principali dati dalla (12) con quelli assegnati per $n = 2, 3, 4, 5$ dal predetto A, nella citata Memoria. I $G_i$ stessi coincidono poi coi covarianti che Clebsch al Cap. VII del suo trattato indica con $\varphi_i$, come prova una opportuna verifica.

19. Sostituiamo ora nel primo membro della (10) al posto delle $z_i$ le loro espressioni (11). Eseguendo i calcoli, e tenuto conto della condizione a cui deve soddisfare $\psi$, si trova che il numeratore della trasformata è una forma $\Psi(g_2, g_3, \dots, g_n)$, *isobarica* nelle $g$, e tale che ponendovi $a_1 = 0$, $a_0 = a_2$ ($z_1 = 0$, $z_2 = 1$) se ne deduce la $\psi$ resa omogenea e moltiplicata per una potenza di $a_0$. Ne segue che il seminvariante $\Psi$ stacca su S la stessa $V_{n-3}$ segata da $\varphi$ (a meno d'intersezioni improprie); e pertanto si ha (n. 16)

$$\varphi \equiv a_0^\alpha g_2^\beta \Psi(g_2, g_3, \dots, g_n) \qquad (\alpha, \beta \text{ interi}).$$

Se $\beta$ fosse negativo, il polinomio $\Psi$ nelle $a_0, a_1, \dots, a_n$ dovrebbe risultare divisibile per $g_2^\beta$; ma basta porre $a_1 = 0$ tenendo conto delle (12) per riconoscere che ciò può avvenire solo se la condizione di divisibilità è soddisfatta considerando $\Psi$ come funzione di $g_2, g_3, \dots, g_n$.

In altre parole $g_2^\beta \Psi$ è pure funzione intera (e isobarica) delle $g$; indicandola ancora con $\Psi$, e passando dai seminvarianti ai covarianti, avremo dunque il teorema:

*Ogni covariante od invariante $\Phi$ d'una forma binaria $f$ d'ordine $n$ può rappresentarsi coll'espressione*

$$\Phi \equiv f^\lambda \Psi(G_2, G_3, \dots, G_n),$$

*nella quale $\lambda$ è un numero intero positivo o negativo, e $\Psi$ una forma isobarica degli $n-1$ covarianti $G_i$ i cui termini principali sono dati dalla* (12).

## Matematica. — *Sur le théorème d'existence des fonctions abéliennes.* Nota di S. Lefschetz, presentata dal Socio G. Castelnuovo.

1. Dans cette Note, écrite sur l'invitation très aimable de M. Castelnuovo, j'avais d'abord l'intention d'exposer ma solution de la question qu'il traite dans ce même fascicule des Rendiconti, telle que je l'avais donnée dans mon Mémoire Bordin. À la réflexion il m'a paru plus intéressant de revenir sur la question et de montrer, ce que je n'avais pu faire alors faute de temps, comment ma méthode permet d'arriver au théorème fondamental de la théorie des fonctions abéliennes en se basant *uniquement* sur les propriétés de définition de ces fonctions.

Soit donc $\Omega$ une matrice à $p$ lignes et $2p$ colonnes et $\varphi(u_1, u_2, \dots, u_p)$ une fonction de $p$ variables complexes. On suppose que

*a*) Le parallélépipède aux périodes, U, correspondant à $\Omega$ de la manière usuelle, est à $2p$ dimensions, fermé.