ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA NAZIONALE

DEI LINCEI

ANNO CCCXVIII.

1921

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXX.

1° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1921

19. Sostituiamo ora nel primo membro della (10) al posto delle z_i le loro espressioni (11). Eseguendo i calcoli, e tenuto conto della condizione a cui deve soddisfare ψ, si trova che il numeratore della trasformata è una forma $\Psi(g_2, g_3, \dots, g_n)$, *isobarica* nelle g, e tale che ponendovi $a_1 = 0$, $a_0 = a_2$ $(z_1 = 0, z_2 = 1)$ se ne deduce la ψ resa omogenea e moltiplicata per una potenza di a_0. Ne segue che il seminvariante Ψ stacca su S la stessa V_{n-3} segata da φ (a meno d'intersezioni improprie); e pertanto si ha (n. 16)

$$\varphi = a_0^\alpha g_2^\beta \Psi(g_2, g_3, \dots, g_n) \qquad (\alpha, \beta \text{ interi}).$$

Se β fosse negativo, il polinomio Ψ nelle $a_0, a_1, \dots, a_n$ dovrebbe risultare divisibile per g_2^β; ma basta porre $a_1 = 0$ tenendo conto delle (12) per riconoscere che ciò può avvenire solo se la condizione di divisibilità è soddisfatta considerando Ψ come funzione di $g_2, g_3, \dots, g_n$.

In altre parole $g_2^\beta \Psi$ è pure funzione intera (e isobarica) delle g; indicandola ancora con Ψ, e passando dai seminvarianti ai covarianti, avremo dunque il teorema:

Ogni covariante od invariante Φ d'una forma binaria f d'ordine n può rappresentarsi coll'espressione

$$\Phi = f^\lambda \Psi(G_2, G_3, \dots, G_n),$$

nella quale λ è un numero intero positivo o negativo, e Ψ una forma isobarica degli $n-1$ covarianti G_i i cui termini principali sono dati dalla (12).

Matematica. — *Sur le théorème d'existence des fonctions abéliennes.* Nota di S. Lefschetz, presentata dal Socio G. Castelnuovo.

1. Dans cette Note, écrite sur l'invitation très aimable de M. Castelnuovo, j'avais d'abord l'intention d'exposer ma solution de la question qu'il traite dans ce même fascicule des Rendiconti, telle que je l'avais donnée dans mon Mémoire Bordin. À la réflexion il m'a paru plus intéressant de revenir sur la question et de montrer, ce que je n'avais pu faire alors faute de temps, comment ma méthode permet d'arriver au théorème fondamental de la théorie des fonctions abéliennes en se basant *uniquement* sur les propriétés de définition de ces fonctions.

Soit donc Ω une matrice à p lignes et $2p$ colonnes et $\varphi(u_1, u_2, \dots, u_p)$ une fonction de p variables complexes. On suppose que

a) Le parallélépipède aux périodes, U, correspondant à Ω de la manière usuelle, est à $2p$ dimensions, fermé.

b) La fonction φ est entière ou méromorphe, avec au moins *un* zéro, l'ensemble de *tous* ses zéros restant invariant quand on ajoute les périodes aux u.

c) Il n'existe pas de combinaison linéaire des u s'annulant en tout point de cet ensemble.

Il s'agit de montrer, en partant de ces seules hypothèses, que Ω est, selon la locution maintenant classique de M. Scorza, une matrice de Riemann — c'est là le théoreme fondamental.

2. Il résulte d'abord de suite de *b*) que l'ensemble des zéros forme une multiplicité analytique à $2p-2$ dimensions. Considérant les éléments de la frontière de U qui sont parallèles, comme homologues au sens usuel de l'Analysis Situs, on définit une multiplicité fermée que nous appelerons toujours U. Numérotons les arètes partant d'un même sommet. $1, 2, \ldots, 2p$, la μ^e correspondant à la μ^e colonne de Ω. Les faces à k dimensions forment base minima pour les cycles à k dimensions — nous les désignerons par $(i_1, i_2, \ldots, i_k)$, les indices entre parenthèses étant ceux des arètes correspondantes, leur ordre définissant l'orientation de la face.

3. La multiplicité E lieu des zéros de φ intérieurs à U en est un cycle à $2p-2$ dimensions.

Comptons maintenant avec Poincaré les points d'intersection de deux multiplicités M, M', positivement ou négativement suivant l'orientation relative des multiplicités en ces points, le nombre total ainsi obtenu étant désigné par (M, M'). En particulier posons $(\mathrm{E}, (\mu, \nu)) = m_{\mu\nu} = -m_{\nu\mu}$. Les m seront tous des entiers finis pour un choix convenable du système « primitif » de périodes, donc pour tout autre aussi. En se servant de la propriété que $(\mathrm{M}, \mathrm{M}') = 0$ si $\mathrm{M} \sim 0$ ou $\mathrm{M}' \sim 0$, on trouve aisément

$$\mathrm{E} \sim \Sigma(-1)^n \cdot m_{i_1 i_2}(i_3, i_4, \ldots, i_{2p});$$

$(i_1 < i_2; i_3 < i_4 < \cdots < i_{2p}$; n nombre de permutations dans la série des i).

La fonction $\varphi(u_1 - e_1, u_2 - e_2, \ldots, u_p - e_p)$ a exactement les mêmes propriétés que φ, et il y a un cycle correspondant $\sim \mathrm{E}$ — désignons par E^2 son intersection avec le premier, en adoptant une définition convenable pour son orientation. On trouve de même

$$\mathrm{E}^2 \sim 2\,\Sigma(-1)^n m_{i_1 i_2} m_{i_3 i_4}(i_5, i_6, \ldots, i_{2p})$$
$$(i_1 < i_2; i_3 < i_4; i_5 < i_6 < \cdots < i_{2p}).$$

Ceci peut-être continué et on trouve finalement

$$\mathrm{E}^{p-1} \sim \frac{(p-1)!}{2\pi}\,\Sigma\,\mathrm{M}_{\mu\nu}(\mu, \nu)$$

où $\mathrm{M}_{\mu\nu}$ est le coefficient de $m_{\mu\nu}$ dans le développement du déterminant de la forme alternée à coefficients entiers

$$F = \Sigma m_{\mu\nu} x_\mu y_\nu$$

et π en est le pfaffien. La forme alternée à coefficients entiers

$$\Phi = \Sigma M_{\mu\nu} x_\mu y_\nu$$

est donc l'inverse de F.

4. On montre maintenant facilement que

$$\frac{2\pi}{(p-1)!} \int\int_{E^{p-1}} du_j \, du_k = \Sigma M_{\mu\nu} \, \omega_{j\mu} \, \omega_{k\nu} = 0 .$$

De plus soient $v = v' + iv''$ une combinaison linéaire quelconque des u, $\xi_\mu + i\eta_\mu$ sa période correspondant à la μ^e colonne de Ω, $x = x' + ix''$ une fonction analytique de point sur E^{p-1}. On a

$$\frac{2\pi}{(p-1)!} \int\int_{E^{p-1}} dv' \, dv'' = \frac{2\pi}{(p-1)!} \int\int_{E^{p-1}} \left[\left(\frac{\partial v'}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v'}{\partial y}\right)^2 \right] dx \, dy$$

$$= \Sigma M_{\mu\nu} \, \xi_\mu \, \eta_\nu \neq 0$$

et par suite Ω, qui possède la forme principale Φ, est bien une matrice de Riemann. *Le théorème fondamental est donc démontré.*

Dans le cas de M. Castelnuovo on démontre que ses coefficients $m_{\mu\nu}$ ont bien le sens que nous leur avons attribué d'où son résultat s'ensuit.

Disons seulement pour terminer que par cette méthode on obtient tous les éléments d'une exposition de la théorie des fonctions abéliennes où l'on se passerait presque complètement des formules assez compliquées de la théorie des fonctions thêtas.

Matematica. — *Sulle funzioni abeliane.* I: *Le funzioni intermediarie.* Nota del Socio G. Castelnuovo.

Il prof. Lefschetz, nella Memoria ancora inedita che ottenne il premio Bordin dall'Accademia di Parigi, stabilì alcuni importanti risultati sulle funzioni abeliane, con un metodo molto notevole fondato su considerazioni di *Analysis Situs*, del quale trovasi un cenno nella Nota che precede questa mia. Io stesso ero arrivato da qualche tempo ad analoghi risultati seguendo una via puramente analitica, che fu, a dir vero, già indicata dal Frobenius, ma qui viene sfrondata da parti accessorie, notevolmente proseguita, e messa in maggior luce ricorrendo alle geniali vedute dello Scorza e al linguaggio della geometria algebrica. La stessa via permette di esten-