# ATTI

DELLA

# REALE ACCADEMIA NAZIONALE

# DEI LINCEI

ANNO CCCXVIII.

1921

SERIE QUINTA

# RENDICONTI

**Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.**

**VOLUME XXX.**

1° SEMESTRE.


ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1921

la forme alternée à coefficients entiers

$$F = \Sigma m_{\mu\nu} x_\mu y_\nu$$

et $\pi$ en est le pfaffien. La forme alternée à coefficients entiers

$$\Phi = \Sigma M_{\mu\nu} x_\mu y_\nu$$

est donc l'inverse de F.

4. On montre maintenant facilement que

$$\frac{2\pi}{(p-1)!}\int\int_{E^{p-1}} du_j\, du_k = \Sigma M_{\mu\nu}\, \omega_{j\mu}\, \omega_{k\nu} = 0 .$$

De plus soient $v = v' + iv''$ une combinaison linéaire quelconque des $u$, $\xi_\mu + i\eta_\mu$ sa période correspondant à la $\mu^e$ colonne de $\Omega$, $x = x' + ix''$ une fonction analytique de point sur $E^{p-1}$. On a

$$\frac{2\pi}{(p-1)!}\int\int_{E^{p-1}} dv'\, dv'' = \frac{2\pi}{(p-1)!}\int\int_{E^{p-1}}\left[\left(\frac{\partial v'}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v'}{\partial y}\right)^2\right] dx\, dy$$

$$= \Sigma M_{\mu\nu}\, \xi_\mu\, \eta_\nu \neq 0$$

et par suite $\Omega$, qui possède la forme principale $\Phi$, est bien une matrice de Riemann. *Le théorème fondamental est donc démontré.*

Dans le cas de M. Castelnuovo on démontre que ses coefficients $m_{\mu\nu}$ ont bien le sens que nous leur avons attribué d'où son résultat s'ensuit.

Disons seulement pour terminer que par cette méthode on obtient tous les éléments d'une exposition de la théorie des fonctions abéliennes où l'on se passerait presque complètement des formules assez compliquées de la théorie des fonctions thêtas.

## Matematica. — *Sulle funzioni abeliane.* I: *Le funzioni intermediarie.* Nota del Socio G. Castelnuovo.

Il prof. Lefschetz, nella Memoria ancora inedita che ottenne il premio Bordin dall'Accademia di Parigi, stabilì alcuni importanti risultati sulle funzioni abeliane, con un metodo molto notevole fondato su considerazioni di *Analysis Situs*, del quale trovasi un cenno nella Nota che precede questa mia. Io stesso ero arrivato da qualche tempo ad analoghi risultati seguendo una via puramente analitica, che fu, a dir vero, già indicata dal Frobenius, ma qui viene sfrondata da parti accessorie, notevolmente proseguita, e messa in maggior luce ricorrendo alle geniali vedute dello Scorza e al linguaggio della geometria algebrica. La stessa via permette di estendere e semplificare i procedimenti applicati dal sig. Humbert al caso di due variabili ([1]). Ritengo perciò opportuno raccogliere le mie ricerche in questa Nota e in altre successive.

1. Data una matrice di $p$ righe e $2p$ colonne a elementi complessi

$$(1) \qquad \begin{vmatrix} \omega_{11} & \ldots\ldots & \omega_{1\,2p} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \omega_{p1} & \ldots\ldots & \omega_{p\,2p} \end{vmatrix},$$

la costruzione di una funzione abeliana di $p$ variabili, la quale ammetta i $2p$ sistemi di periodi forniti dalle verticali della (1), può ricondursi, come è noto, alla costruzione di funzioni *intermediarie*, cioè funzioni olomorfe al finito $\varphi(u_1, .., u_p)$ dotate di una quasi-periodicità definita dalle $2p$ uguaglianze

$$(2) \qquad \varphi(u_1 + \omega_{1l}, \ldots, u_p + \omega_{pl}) = \varphi(u_1, \ldots, u_p)\, e^{-2\pi i(\lambda_{1l}u_1 + \cdots + \lambda_{pl}u_p) + \mu_l} \qquad (l = 1, 2, \ldots, 2p).$$

Le $\lambda$ e le $\mu$ sono costanti, quest'ultime prive di interesse.

Sotto quali condizioni esistono siffatte funzioni?

Supposto che esista la funzione $\varphi((u))$ soddisfacente alle (2), formiamo coi *periodi* $\omega$ e colle $\lambda$ (dette talvolta *periodi di seconda specie*) il determinante

$$(3) \qquad \delta = \begin{vmatrix} \omega_{11} & \ldots\ldots & \omega_{1\,2p} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \omega_{p1} & \ldots\ldots & \omega_{p\,2p} \\ \lambda_{11} & \ldots\ldots & \lambda_{1\,2p} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \lambda_{p1} & \ldots\ldots & \lambda_{p\,2p} \end{vmatrix}.$$

Vedremo che $\delta$ è un intero; potremo supporre $\delta \geqq 0$, eseguendo, se occorre, uno scambio tra due verticali del determinante. Chiameremo $\delta$ il *determinante* della funzione $\varphi$.

Si dimostrano facilmente le seguenti proprietà:

*a*) Le espressioni

$$(4) \qquad \omega_{1i}\lambda_{1k} - \omega_{1k}\lambda_{1i} + \cdots + \omega_{pi}\lambda_{pk} - \omega_{pk}\lambda_{pi} = m_{ik} \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, 2p)$$

([1]) Frobenius, Journal für d. r. u. a. Mathem., vol. *97* (1883); Humbert, Journal de Math. (V$^e$ s.), voll. *5* e *6* (1899-1900); Scorza, Rendic. Circolo Matem. di Palermo, tomo *41* (1916). Mentre correggo le bozze mi giunge la notizia della morte di G. Humbert. Invio un reverente saluto alla memoria di questo scienziato, le cui belle ricerche sulle funzioni abeliane hanno ispirato, nell'ultimo decennio, tanti lavori della scuola italiana.

hanno valori interi (detti *interi caratteristici* della $\varphi$); si giustifica calcolando in due modi diversi, mediante le (2), $\varphi((u_h + \omega_{hi} + \omega_{hk}))$.

*b*) Segue, eseguendo opportunamente il quadrato della (3),

$$(5) \qquad \delta^2 = \| m_{ik} \| \qquad (m_{ik} = - m_{ki}).$$

Dunque $\delta$ è un numero intero, uguale (fatta astrazione dal segno) al pfaffiano del determinante sghembo simmetrico (5).

*c*) Se alle variabili $u_h$ e ai periodi $\omega_{hi}$ si sostituiscono loro combinazioni lineari indipendenti $U_h$, $\Omega_{hi}$, anche i periodi di seconda specie $\lambda$ subiscono una trasformazione lineare, ma non mutano nè gli interi caratteristici $m_{ik}$, nè $\delta$.

*d*) La funzione $\varphi$ moltiplicata per un esponenziale ad esponente quadratico nelle $u$, $e^{-\pi i \Sigma \alpha_{ik} u_i u_k}$, fornisce una nuova funzione intermediaria cogli stessi periodi di prima specie $\omega$; i periodi di seconda specie si alterano, ma non mutano nè le $m_{ik}$, nè $\delta$.

*e*) Si eseguisca sulle verticali della matrice (1) una sostituzione a coefficienti interi e determinante non nullo:

$$(6) \qquad \omega'_r = a_{r1}\, \omega_1 + \cdots + a_{rp}\, \omega_{2p} \qquad (r = 1, 2, \ldots, 2p);$$

in queste è omesso il primo indice delle $\omega$, $\omega'$, il quale deve avere lo stesso valore $(1, 2, \ldots, p)$ a sinistra e a destra. La $\varphi$ può considerarsi come una funzione intermediaria delle variabili $u$ coi nuovi periodi $\omega'$. I periodi di seconda specie subiscono la medesima trasformazione lineare, e gli interi caratteristici $m_{ik}$ si mutano in nuovi interi caratteristici $m'_{ik}$ colla legge secondo la quale i coefficienti della forma alternata

$$(7) \qquad \Sigma\, m_{ik}\, \xi_i\, \eta_k \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, 2p)$$

si mutano nei coefficienti della forma alternata $\Sigma m'_{ik} \xi'_i \eta'_k$ quando si passa dalle variabili $\xi, \eta$ alle $\xi', \eta'$ mediante la sostituzione (6). Il determinante $\delta$ si muta in $\delta' = \delta \, \| a_{rs} \|$.

2. La forma alternata (7), che diremo collegata alla $\varphi$, ha un significato notevole relativamente alla matrice (1). Per metterlo in rilievo riguardiamo, collo Scorza, le orizzontali della (1) come contenenti le coordinate omogenee di $p$ punti di uno spazio lineare $S_{2p-1}$, i quali determinano ivi uno spazio $S_{p-1}$ che indicheremo con $\tau$. Siano poi le $\xi$ e le $\eta$ coordinate di due iperpiani ($S_{2p-2}$) passanti per $\tau$, tali adunque che

$$(8) \qquad \sum_{i=1}^{2p} \xi_i\, \omega_{hi} = 0 \quad , \quad \sum_{k=1}^{2p} \eta_k\, \omega_{hk} = 0 \qquad (h = 1, 2, \ldots, p).$$

Moltiplicando i due membri della (4) per $\xi_i \eta_k$ e sommando rispetto agli indici $i$, $k$, si trova

$$\Sigma\, m_{ik}\, \xi_i\, \eta_k = 0 .$$

Questa rappresenta una reciprocità nulla (inviluppo) in $S_{2p-1}$, la quale muta ogni iperpiano passante per $\tau$ in un punto di $\tau$. Segue, se $\delta \neq 0$, che la detta reciprocità nulla, considerata come luogo e rappresentata dall'annullarsi della forma reciproca

$$\Sigma M_{ik} x_i y_k , \tag{9}$$

dove $M_{ik}$ è il complemento algebrico di $m_{ik}$ entro $\|m_{ik}\|$, muta ogni punto di $\tau$ in un iperpiano per $\tau$. Dunque la (9) si annulla se al posto delle $(x_1, \dots, x_{2p})$, $(y_1, \dots, y_{2p})$ poniamo gli elementi di due righe qualsiansi della matrice (1). La forma (9) è, secondo lo Scorza, una *forma alternata di Riemann* della matrice (1). L'esistenza supposta di una funzione intermediaria cogli interi caratteristici $m_{ik}$ porta l'esistenza di una tal forma, cioè di una relazione alternata tra le orizzontali della matrice.

3. È noto che con una opportuna sostituzione lineare a coefficienti interi, del tipo (6) e di modulo $\|a_{rs}\| = \pm 1$, eseguita nel tempo stesso sulle $\xi$ e le $\eta$, la forma alternata (7) si muta nella forma canonica

$$\sum_{i=1}^{p} e_i(\xi'_i \eta'_{i+p} - \xi'_{i+p} \eta'_i) \tag{10}$$

dove le $e_i$ sono interi positivi. La stessa sostituzione applicata ai periodi $\omega$ li muta in periodi $\omega'$ tali che, rispetto ad essi, la funzione intermediaria $\varphi$ ha i nuovi interi caratteristici (n. 1, *e*)

$$m'_{i,i+p} = e_i \quad , \quad m_{ik} = 0 \quad \text{se} \quad k - i \neq \pm p . \tag{11}$$

La forma di Riemann (9) si trasforma (salvo un fattore intero) nella nuova forma di Riemann

$$\sum_{i=1}^{p} \frac{1}{e_i} (x_i y_{i+p} - x_{i+p} y'_i) , \tag{12}$$

che si annulla se vien costruita coi periodi $\omega'$ di due orizzontali qualsiansi della nuova matrice.

Riduciamo questa alla forma canonica

$$\left\| \begin{matrix} e_1 & 0 & \dots & 0 & \sigma_{11} & \sigma_{12} & \dots & \sigma_{1p} \\ 0 & e_2 & \dots & 0 & \sigma_{21} & \sigma_{22} & \dots & \sigma_{2p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & e_p & \sigma_{p1} & \sigma_{p2} & \dots & \sigma_{pp} \end{matrix} \right\| \qquad (\sigma_{ik} = \sigma_{ki}) \tag{13}$$

con una trasformazione lineare eseguita contemporaneamente sulle variabili $u$ e sulle orizzontali della matrice (1) (n. 1, *c*). La $\varphi((u))$ si muterà in una nuova funzione intermediaria $\varphi_1((U))$ coi periodi di prima specie (13) e gli interi caratteristici (11). Moltiplicando $\varphi_1$ per un esponenziale del tipo $e^{-\pi i \Sigma \alpha_{ik} U_j U_k}$ (n. 1, *d*), si ottiene una terza funzione intermediaria $\varphi_2((U))$ coi periodi di prima specie (13), gli interi caratteristici (11) e certi periodi di seconda specie $\lambda'_{ik}$, dei quali si può supporre (scegliendo opportunamente i parametri $\alpha_{ik}$), che siano nulli tutti quelli per cui $i-k \geqq 0$. Allora, tenendo presenti le (11), si vede che per questa $\varphi_2$ il determinante (3), il cui valore non è cambiato, assume l'aspetto

$$(14) \qquad \delta = \begin{vmatrix} e_1 \dots 0 & \sigma_{11} \dots \sigma_{1p} \\ \dots\dots & \dots\dots \\ 0 \dots e_p & \sigma_{p1} \dots \sigma_{pp} \\ 0 \dots 0 & 1 \dots 0 \\ \dots\dots & \dots\dots \\ 0 \dots 0 & 0 \dots 1 \end{vmatrix} \qquad (\sigma_{ik} = \sigma_{ki});$$

e le proprietà di periodicità si presentano sotto la forma semplicissima

$$(15) \begin{cases} \varphi_2(U_1, \dots, U_l + e_l, \dots, U_p) = \varphi_2(U_1, \dots, U_l, \dots, U_p) \\ \varphi_2(U_1 + \sigma_{1l}, \dots, U_p + \sigma_{pl}) = \varphi_2(U_1, \dots, U_p)\, e^{-2\pi i\, U_l + \nu_l} \end{cases} \qquad (l = 1, 2 \dots p)$$

4. Se $\delta = 1$ e quindi $e_1 = \dots = e_p = 1$, la $\varphi_2$ è una funzione $\Theta$ del primo ordine relativa ai periodi (13). In caso opposto eseguiamo la trasformazione di variabili

$$(16) \qquad U_l = \delta v_l = e_1 \dots e_p\, v_l$$

ed assumiamo come nuovi periodi i numeri della tabella

$$(17) \qquad \begin{vmatrix} 1 \dots 0 & \tau_{11} \dots \tau_{1p} \\ \dots\dots & \dots\dots \\ 0 \dots 1 & \tau_{p1} \dots \tau_{pp} \end{vmatrix} \qquad \left(\tau_{ik} = \tau_{ki} = \frac{\sigma_{ik}}{\delta}\right).$$

La $\varphi_2((U))$ diviene una funzione $\Theta((v))$ che soddisfa alle seguenti relazioni:

$$(18) \begin{cases} \Theta(v_1, \dots, v_l + 1, \dots, v_p) = \Theta(v_1, \dots, v_l, \dots, v_p) \\ \Theta(v_1 + \tau_{1l}, \dots, v_p + \tau_{pl}) = \Theta(v_1, \dots, v_p)\, e^{-2\pi i \delta v_l + \nu'_l} \end{cases} \qquad (l = 1, 2, \dots p)$$

Si tratta dunque di una funzione $\Theta$, propriamente detta, avente l'ordine $\delta$. È una $\Theta$ particolare, perchè si ha pure

$$(19) \qquad \Theta\left(v_1, \dots, v_l + \frac{e_l}{\delta}, \dots, v_p\right) = \Theta(v_1, \dots, v_l, \dots, v_p).$$

Si ricordi ora che per la esistenza di una funzione $\Theta$ coi periodi (17) è necessario (e sufficiente) che la forma alternata

$$(20) \qquad \sum_{i=1}^{p} (X_i Y_{i+p} - X_{i+p} Y_i)$$

assuma un *segno costante* (positivo) quando al posto delle X e delle Y si pongono le parti reali ed i coefficienti dell'unità immaginaria dei periodi di una combinazione lineare $\sum_{i=1}^{p} \varrho_i v_i$ delle variabili, *qualunque siano* i valori attribuiti ai parametri $\varrho$. Ora, poichè la (20) è la trasformata della forma (9) attraverso le successive trasformazioni a coefficienti *reali* eseguite sulle $x, y$ e sui periodi (1), segue che *la forma* (9) *conserva sempre lo stesso segno quando al posto delle $x$ e delle $y$ si pongano le parti reali ed i coefficienti dell'unità immaginaria dei periodi di una qualsiasi combinazione lineare delle variabili primitive* $u_1, \dots, u_p$. Diremo collo Scorza che la (9) è una forma riemanniana *principale* della matrice (1).

In conclusione, e tenuto conto che il ragionamento si può invertire, possiamo enunciare il teorema:

*Affinchè esista una funzione intermediaria coi periodi* (*di prima specie*) (1) *e gli interi caratteristici* $m_{ik}$ *è necessario e sufficiente che la matrice* (1) *ammetta una forma alternata riemanniana principale, e precisamente la* (9), i cui coefficienti sono gli elementi del determinante aggiunto di $\|m_{ik}\|$.

Matematica. — *Invarianti e covarianti metrici nelle deformazioni di specie superiore delle superficie.* Nota IV di E. Bompiani, presentata dal Socio G. Castelnuovo [1].

1. Dedico questa Nota alla *interpretazione geometrica degli invarianti Gaussiani* già introdotti [2] limitandomi ad accennare i risultati per le deformazioni di 2ª specie.

2. Data una superficie di $S_n$ ($n \geq 5$) con $S_5$ 2-osculatore generico esiste in ogni punto P della superficie una normale ben determinata (che dirò NORMALE OMBELICALE) e su di essa un punto (che dirò CENTRO DI CURVATURA OMBELICALE), contenuta nello $S_5$ 2-osculatore in P, caratterizzati da una delle seguenti proprietà:

1) *La proiezione ortogonale della superficie sullo* $S_3$ *individuato dal piano tangente in* P *e dalla normale ombelicale ha in* P *un ombelico*; *il centro di curvatura della superficie proiezione nell'ombelico è il centro di curvatura ombelicale.*

2) *Tutti gli* $S_{n-2}$ *normali alla superficie nei punti infinitamente vicini a* P *incontrano lo* $S_5$ *2-osculatore in* P *nel centro di curvatura ombelicale* (*relativo a* P).

(1) Presentata nella seduta del 16 dicembre 1920.

(2) Vedansi le 3 Note precedenti dallo stesso titolo; questi Rendic., vol. XXVIII, 2 e 3 nov. 1919; vol. XXIX, 18 genn. 1920. Ricordo che ho chiamato invarianti e covarianti Gaussiani quelli che pur contenendo derivate d'ordine $\nu+1$ delle coordinate dei punti della superficie sono tali per deformazioni di specie $\nu$; cioè, mentre dipendono (apparentemente) dai coefficienti delle prime $\nu+1$ forme fondamentali, si possono calcolare mediante quelli di sole $\nu$ forme $L_1, \dots L_\nu$.