ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

ANNO CCCXVIII.

1921

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXX.

1° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1921

lori attribuiti ai parametri ϱ. Ora, poichè la (20) è la trasformata della forma (9) attraverso le successive trasformazioni a coefficienti *reali* eseguite sulle x, y e sui periodi (1), segue che *la forma* (9) *conserva sempre lo stesso segno quando al posto delle x e delle y si pongano le parti reali ed i coefficienti dell'unità immaginaria dei periodi di una qualsiasi combinazione lineare delle variabili primitive $u_1, \dots, u_p$*. Diremo collo Scorza che la (9) è una forma riemanniana *principale* della matrice (1).

In conclusione, e tenuto conto che il ragionamento si può invertire, possiamo enunciare il teorema:

Affinchè esista una funzione intermediaria coi periodi (*di prima specie*) (1) *e gli interi caratteristici m_{ik} è necessario e sufficiente che la matrice* (1) *ammetta una forma alternata riemanniana principale, e precisamente la* (9), i cui coefficienti sono gli elementi del determinante aggiunto di $\|m_{ik}\|$.

Matematica. — *Invarianti e covarianti metrici nelle deformazioni di specie superiore delle superficie.* Nota IV di E. Bompiani, presentata dal Socio G. Castelnuovo [1].

1. Dedico questa Nota alla *interpretazione geometrica degli invarianti Gaussiani* già introdotti [2] limitandomi ad accennare i risultati per le deformazioni di 2ª specie.

2. Data una superficie di S_n ($n \geq 5$) con S_5 2-osculatore generico esiste in ogni punto P della superficie una normale ben determinata (che dirò normale ombelicale) e su di essa un punto (che dirò centro di curvatura ombelicale), contenuta nello S_5 2-osculatore in P, caratterizzati da una delle seguenti proprietà:

1) *La proiezione ortogonale della superficie sullo S_3 individuato dal piano tangente in* P *e dalla normale ombelicale ha in* P *un ombelico; il centro di curvatura della superficie proiezione nell'ombelico è il centro di curvatura ombelicale.*

2) *Tutti gli S_{n-2} normali alla superficie nei punti infinitamente vicini a* P *incontrano lo* S_5 *2-osculatore in* P *nel centro di curvatura ombelicale* (*relativo a* P).

(1) Presentata nella seduta del 16 dicembre 1920.

(2) Vedansi le 3 Note precedenti dallo stesso titolo; questi Rendic., vol. XXVIII, 2 e 3 nov. 1919; vol. XXIX, 18 genn. 1920. Ricordo che ho chiamato invarianti e covarianti Gaussiani quelli che pur contenendo derivate d'ordine $\nu+1$ delle coordinate dei punti della superficie sono tali per deformazioni di specie ν; cioè, mentre dipendono (apparentemente) dai coefficienti delle prime $\nu+1$ forme fondamentali, si possono calcolare mediante quelli di sole ν forme $L_1, \dots L_\nu$.

3) *La normale ombelicale è la normale al piano della conica delle curvature* [considerata dal Levi [1]] *relativa al punto* P *condotta da* P; *e il centro ombelicale è il polo di questo piano rispetto alla sfera di raggio unitario e di centro* P *contenuta nello* S_3 *di* P *e della conica.*

4) *La congruenza delle normali ombelicali ad una superficie stabilisce una rappresentazione conforme fra essa e la superficie parallela costruita secondo quelle normali* (prendendo su ciascuna un segmento infinitesimo costante h); *il modulo della rappresentazione dipende soltanto dal raggio di curvatura ombelicale* (e, naturalmente, da h).

Se si prosegue con continuità la costruzione che fa passare da una superficie a quella parallela e infinitamente vicina secondo le normali ombelicali [2] si ottiene una V_3 dotata della notevole proprietà di avere le superficie del sistema costruito come quasi-asintotiche [3] nel senso che lo S_5 2-osculatore ad una di esse in un suo punto contiene lo S_3 tangente nel punto alla V_3; le loro traiettorie ortogonali (inviluppate dalle rette delle ∞^1 congruenze ombelicali) stabiliscono fra due qualsiansi di esse una corrispondenza conforme.

3. Se si indicano con $x_i(u, v)$ le coordinate cartesiane rettangolari dei punti della superficie, con D_2 la matrice (a 5 righe ed $n \geq 5$ colonne) formata con le loro derivate prime e seconde (che per ipotesi ha caratteristica 5, quindi $D_2^2 \neq 0$), i coseni direttori l_i della normale ombelicale in x, e il raggio di curvatura ombelicale ϱ sono dati da

$$l_i = \frac{H_i}{\sqrt{\Sigma H_i^2}} \quad ; \quad \varrho = \frac{\sqrt{\Sigma H_i^2}}{D_2^2},$$

avendo posto

$$H_i = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_i}{\partial u} & \frac{\partial x_i}{\partial v} & \frac{\partial^2 x_i}{\partial u^2} & \frac{\partial^2 x_i}{\partial u\,\partial v} & \frac{\partial^2 x_i}{\partial v^2} & 0 \\ E & F & [1020] & [1011] & [1002] & 0 \\ F & G & [0120] & [0111] & [0102] & 0 \\ [2010] & [2001] & [2020] & [2011] & [2002] & E \\ [1110] & [1101] & [1120] & [1111] & [1102] & F \\ [0201] & [0201] & [0220] & [0211] & [0202] & G \end{vmatrix}$$

[1] E. E. Levi, *Saggio sulla teoria delle superficie* ecc. [Ann. Scuola Norm. di Pisa, vol. X], n. 37.

[2] La congruenza delle normali ombelicali varia da superficie a superficie.

[3] La nozione più generale di varietà quasi-asintotica entro una varietà qualsiasi è stata da me posta fin dal 1912; cfr. *Recenti progressi nella geometria proiettiva differenziale degli iperspazi* [Internat. Congress of Mathematicians, Cambridge, August 1912].

e
$$[hklm] = \Sigma_i \frac{\partial^{h+k} x_i}{\partial u^h \, \partial v^k} \frac{\partial^{l+m} x_i}{\partial u^l \, \partial v^m}.$$

Il raggio di curvatura ombelicale ϱ è, naturalmente, un invariante (assoluto) della superficie per deformazioni di 2ª specie.

4. Ciò posto si trova facilmente che:

5) *Esistono infinite ipersfere* (V^2_{n-1}) *osculatrici ad una superficie in* P (cioè contenenti gli intorni di 1° e 2° ordine di P); *i loro centri sono nello* S_{n-5} *normale allo* S_5 *2-osculatore* (alla superficie in P) *condotto per il centro di curvatura ombelicale* (e NON per P).

6) *Se l'ambiente è uno* S_6 ($n = 6$) *fra le* ∞^1 *ipersfere osculatrici* (*che determinano in* P *una involuzione di terne di tangenti*) *ve ne sono* QUATTRO *tali che la loro sezione con la superficie nel punto* (*che è triplo*) *ha una tangente doppia.*

7) *L'inverso dei prodotti delle distanze dei loro 4 centri dallo* S_5 *2-osculatore* (*quindi dal centro ombelicale, e* NON *da* P), *per quanto involga derivate terze, è un invariante (assoluto) per deformazioni di 2ª specie ed è espresso da una frazione che ha per numeratore l'invariante Gaussiano (relativo) della 3ª forma fondamentale,*

$$4(L_{30} L_{12} - L_{21}^2)(L_{21} L_{03} - L_{12}^2) - (L_{30} L_{03} - L_{21} L_{12})^2,$$

quindi

8) *se quest'invariante è nullo una almeno delle distanze indicate diviene infinita.*

Ma di più si possono caratterizzare proiettivamente le superficie (sempre di S_6) per le quali ciò accade. Infatti

9) *se i tre sistemi di quasi-asintotiche di una superficie di* S_6 *determinati su di essa dagli* S_5 *2-osculatori* (*cioè aventi per tangenti in ciascun punto le tangenti nel punto triplo della sezione determinata dallo* S_5) *si riducono a* DUE *soli distinti, cioè se esiste un sistema doppio di quasi-asintotiche, allora essa ha l'invariante Gaussiano per deformazioni di 2ª specie nullo; e viceversa.*

Se poi si avesse un solo sistema (triplo) di quasi-asintotiche, si annullerebbe, oltre l'invariante, il covariante Gaussiano e si ritroverebbe un risultato contenuto nella Nota II, n. 4.

5. È evidente l'analogia delle proprietà esposte in 6)-9) per le superficie di S_6 (in rapporto alle deformazioni di 2ª specie) con le proprietà delle superficie di S_3 (in rapporto alle ordinarie applicabilità).

Come per le superficie di S_3 (e soltanto per queste) si può dare una interpretazione geometrica della curvatura di Gauss per mezzo di misure eseguite nell'ambiente (fuori, quindi, della superficie) così per le superficie di S_6 si può costruire con elementi esterni ad esse un'interpretazione geometrica dell'invariante Gaussiano relativo alla 3ª forma fondamentale; e il suo annullarsi è messo in rapporto [con le 8) 9)] ad un fatto proiettivo analogo a quello che caratterizza le sviluppabili. E anche qui, come per l'annullarsi della curvatura Gaussiana, il fatto metrico sussiste *sempre* in conseguenza della specializzazione proiettiva della superficie, ma non viceversa: solo per determinate dimensioni dell'ambiente (3 se si tratta di deformazioni di 1ª specie, 6 per quelle di 2ª) il fatto proiettivo è necessaria conseguenza di quello metrico.

6. Rappresentazione sferica delle superficie di S_6.

Si può fare una rappresentazione della superficie sull'ipersfera di raggio 1 servendosi delle normali agli S_5 2-osculatori alla superficie. È notevole il fatto che l'analogia ora messa in evidenza (fra le superficie di S_3 considerate rispetto alle applicabilità, e quelle di S_6 per le def. di 2ª specie) si conserva e si ha:

Il limite cui tende il rapporto fra l'area di un pezzo della superficie data e la corrispondente della superficie rappresentativa, al tendere della prima a zero, è un invariante Gaussiano (assoluto) per deformazioni di 2ª specie.

S'introducano le tre forme simboliche

$$L_3^{(u)} \equiv L_{30}\,du^2 + 2\,L_{21}\,du\,dv + L_{12}\,dv^2$$

$$L_3^{(v)} \equiv L_{21}\,du^2 + 2\,L_{12}\,du\,dv + L_{03}\,dv^2$$

(derivate dalla 3ª forma fondamentale L_3; v. Note precedenti)

$$C \equiv C_{20}\,du^2 + 2\,C_{11}\,du\,dv + C_{02}\,dv^2$$

nella quale i coefficienti sono le matrici ottenute da D_2 sopprimendovi successivamente le linee con le $\frac{\partial^2 x_i}{\partial v^2}$, $\frac{\partial^2 x_i}{\partial u\,\partial v}$, $\frac{\partial^2 x_i}{\partial u^2}$, divise per $EG - F^2$; e s'indichino con $\omega^2(L_3^{(u)}, C)$, $\omega^2(L_3^{(v)}, C)$ le 2ᵉ spinte (invarianti simultanei) fra ciascuna delle prime due e la terza: detti e, f, g i coefficienti del ds'^2 della superficie rappresentativa sull'ipersfera è

$$ds'^2 = \frac{(EG - F^2)^2}{D_2^2} \Big\{ [\omega^2(L_3^{(u)}, C)]^2\,du^2 + 2\,\omega^2(L_3^{(u)}, C)\,\omega^2(L_3^{(v)}, C)\,du\,dv + [\omega^2(L_3^{(v)}, C)]^2\,dv^2 \Big\}$$

$$\frac{eg - f^2}{EG - F^2} = \left[\frac{(EG - F^2)^{3/2}}{D_2^2}\right]^2 \Big\{ [\omega^2(L_3^{(u)}, C)]^2\,[\omega^2(L_3^{(v)}, C)]^2 - [\omega^2(L_3^{(u)}, C)\,\omega^2(L_3^{(v)}, C)]^2 \Big\}.$$

Nell'ultima parentesi $\}\{$ si possono far figurare i prodotti

$$(L_{3-\rho,\rho}\, L_{2\tau,\tau+1} - L_{2-\rho,\rho+1}\, L_{3-\tau,\tau})\,(L_{3-\sigma,\sigma}\, L_{2-\varepsilon,\varepsilon+1} - L_{2-\sigma,\sigma+1}\, L_{3-\varepsilon,\varepsilon}),$$

il che mette chiaramente in evidenza il carattere invariantivo del rapporto studiato per deformazioni di 2ª specie, pur essendo costruito con i coefficienti di L_3 (Nota I, n. 2).

7. A complemento di quanto precede e per metterne in luce l'interesse generale è da osservarsi che se una superficie di S_n ha come spazio $(\nu - 1)$-osculatore generico un S_ρ $(\rho < n)$, mentre lo spazio ν-osculatore coincide con S_n, *non* sono movimenti tutte le deformazioni di specie $< \nu$, mentre lo sono quelle di specie ν.

Interpretazioni esterne (con costruzioni nell'ambiente) degli invarianti gaussiani per deformazioni di specie $\nu - 1$ si hanno per modelli della superficie in S_n con $n = \rho + 1$.

I numeri ρ e ν sono *invarianti proiettivo-differenziali* della superficie; da ciò hanno origine i legami già incontrati o semplicemente accennati [1] fra proprietà proiettive e metriche nella teoria delle deformazioni.

Matematica. — *Risoluzione del problema simmetrico di Dirichlet pel cilindro circolare.* Nota di ROCCO SERINI, presentata dal Socio T. LEVI-CIVITA [2].

Sia un cilindro circolare di raggio 1 ed altezza a avente per asse l'asse delle z. Scopo della presente Nota è di determinare la funzione armonica $V(r, z)$ $(r = \sqrt{x^2 + y^2})$ simmetrica rispetto all'asse z, che prende in superficie determinati valori. Questi saranno dati sulle basi $z = 0$, $z = a$ da due funzioni $f(r)$, $\varphi(r)$ che si suppongono continue e sviluppabili in serie di funzioni cilindriche nell'intervallo $(0, 1)$ e precisamente sia

$$V(r, 0) = f(r) = A_0 + \sum_1^\infty A_n\, I_0(\alpha_n r), \tag{1}$$

$$V(r, a) = \varphi(r) = B_0 + \sum_1^\infty B_n\, I_0(\alpha_n r), \tag{2}$$

dove $I_0(x)$ è la funzione di Bessel di prima specie e d'ordine zero, e α_n $(n = 1, 2, ...)$ le radici della $I_0'(x) = 0$. Questi sviluppi sono convergenti in tutto l'intervallo, estremi compresi, e dànno anche per $r = 1$ i valori $f(1 - 0) = f(1)$, $\varphi(1 - 0) = \varphi(1)$ [3].

(1) V. le mie Note: *Determinazione delle superficie* ecc. [Ist. Lombardo, vol. LII, 1919₂, fasc. 16-18].

(2) Presentata nella seduta del 19 dicembre 1920.

(3) Vedi Dini, *Sulla serie di Fourier*. Pisa, 1880, pag. 189 e segg.