ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA NAZIONALE

DEI LINCEI

ANNO CCCXVIII.

1921

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXX.

1° Semestre.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1921

Nell'ultima parentesi } { si possono far figurare i prodotti

$$(L_{3-\rho,\rho}\, L_{2\tau,\tau+1} - L_{2-\rho,\rho+1}\, L_{3-\tau,\tau})\,(L_{3-\sigma,\sigma}\, L_{2-\varepsilon,\varepsilon+1} - L_{2-\sigma,\sigma+1}\, L_{3-\varepsilon,\varepsilon}),$$

il che mette chiaramente in evidenza il carattere invariantivo del rapporto studiato per deformazioni di 2ª specie, pur essendo costruito con i coefficienti di L_3 (Nota I, n. 2).

7. A complemento di quanto precede e per metterne in luce l'interesse generale è da osservarsi che se una superficie di S_n ha come spazio $(\nu-1)$-osculatore generico un S_ρ $(\rho < n)$, mentre lo spazio ν-osculatore coincide con S_n, *non* sono movimenti tutte le deformazioni di specie $< \nu$, mentre lo sono quelle di specie ν.

Interpretazioni esterne (con costruzioni nell'ambiente) degli invarianti gaussiani per deformazioni di specie $\nu - 1$ si hanno per modelli della superficie in S_n con $n = \rho + 1$.

I numeri ρ e ν sono *invarianti proiettivo-differenziali* della superficie; da ciò hanno origine i legami già incontrati o semplicemente accennati [1] fra proprietà proiettive e metriche nella teoria delle deformazioni.

Matematica. — *Risoluzione del problema simmetrico di Dirichlet pel cilindro circolare.* Nota di Rocco Serini, presentata dal Socio T. Levi-Civita [2].

Sia un cilindro circolare di raggio 1 ed altezza a avente per asse l'asse delle z. Scopo della presente Nota è di determinare la funzione armonica $V(r, z)$ $(r = \sqrt{x^2 + y^2})$ simmetrica rispetto all'asse z, che prende in superficie determinati valori. Questi saranno dati sulle basi $z = 0$, $z = a$ da due funzioni $f(r)$, $\varphi(r)$ che si suppongono continue e sviluppabili in serie di funzioni cilindriche nell'intervallo $(0, 1)$ e precisamente sia

$$V(r, 0) = f(r) = A_0 + \sum_1^\infty A_n\, I_0(\alpha_n r), \tag{1}$$

$$V(r, a) = \varphi(r) = B_0 + \sum_1^\infty B_n\, I_0(\alpha_n r), \tag{2}$$

dove $I_0(x)$ è la funzione di Bessel di prima specie e d'ordine zero, e α_n $(n = 1, 2, \ldots)$ le radici della $I_0'(x) = 0$. Questi sviluppi sono convergenti in tutto l'intervallo, estremi compresi, e dànno anche per $r = 1$ i valori $f(1-0) = f(1)$, $\varphi(1-0) = \varphi(1)$ [3].

(1) V. le mie Note: *Determinazione delle superficie* ecc. [Ist. Lombardo, vol. LII, 1919₂, fasc. 16-18].

(2) Presentata nella seduta del 19 dicembre 1920.

(3) Vedi Dini, *Sulla serie di Fourier*. Pisa, 1880, pag. 189 e segg.

I valori della funzione $V(r, z)$ sulla superficie laterale siano dati da una funzione $\psi(z)$ continua e che si suppone sviluppabile in serie di Fourier nell'intervallo $(0, a)$: dovrà essere dunque

$$(3) \qquad V(1, z) = \psi(z) \quad \text{con} \quad f(1) = \psi(0) \ , \ \varphi(1) = \psi(a) ,$$

le due ultime esprimendo che la ψ si attacca con continuità alle f, φ, passando dalla superficie laterale alle basi.

1. Determinazione formale della V. — La $V(r, z)$ soddisfa alla equazione

$$(4) \qquad \Delta^2 V = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}\left(r \frac{\partial V}{\partial r}\right) + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0 ;$$

di questa considero i seguenti tre tipi fondamentali di soluzioni:

$$\alpha z + \beta \ , \quad (Ce^{kz} + De^{-kz}) I_0(kr) \ , \quad E \operatorname{sen} Kz \, I_0(iKr) ,$$

(con $\alpha, \beta, C, D, E, k, K$ costanti arbitrarie) delle quali la prima evidente, la seconda ben nota [1], mentre la terza si ottiene dalla seconda ponendo $k = iK$, $C = -D = \frac{E}{2}$. Si osservi che $I_0(ix)$ è reale essendo $I_0(x)$ funzione pari. Poniamo allora

$$(5) \qquad V(r, z) = \alpha z + \beta +$$
$$+ \sum_1^\infty E_n \operatorname{sen} \frac{n\pi z}{a} I_0\left(i \frac{n\pi r}{a}\right) + \sum_1^\infty (C_n e^{\alpha_n z} + D_n e^{-\alpha_n z}) I_0(\alpha_n r) ,$$

dove le α_n hanno il significato detto prima, e $\alpha, \beta, E_n, C_n, D_n$ sono costanti da determinarsi. Dalla (5) per le (1) (2) avremo

$$V(r, 0) = \beta + \sum_1^\infty (C_n + D_n) I_0(\alpha_n r) = A_0 + \sum A_n I_0(\alpha_n r) ,$$

$$V(r, a) = \alpha a + \beta + \sum_1^\infty (C_n^{\alpha_n a} + D_n e^{-\alpha_n a}) I_0(\alpha_n r) = B_0 + \sum B_n I_0(\alpha_n r) ,$$

quindi per l'univocità degli sviluppi

$$(6) \qquad \left\{ \begin{array}{ll} \beta = A_0 \ , \quad \alpha = \dfrac{B_0 - A_0}{a} , \\ C_n + D_n = A_n & , \\ C_n e^{\alpha_n a} + D_n e^{-\alpha_n a} = B_n & , \end{array} \right.$$

[1] Vedi Beltrami, *Sulla teoria delle funzioni potenziali simmetriche*, Mem. Accad. Bologna, 1881, tomo II; oppure *Opere*, tomo III.

e di qui

$$(6') \qquad C_n e^{\alpha_n z} + D_n e^{-\alpha_n z} = \frac{A_n(e^{\alpha_n(a-z)} - e^{-\alpha_n(a-z)}) + B_n(e^{\alpha_n z} - e^{-\alpha_n z})}{e^{\alpha_n a} - e^{-\alpha_n a}}.$$

Rimarranno da determinarsi i coefficienti E_n. Consideriamo perciò la funzione

$$(7) \qquad F(z) = \frac{B_0 - A_0}{a} z + A_0 +$$

$$+ \sum_1^\infty \frac{A_n(e^{\alpha_n(a-z)} - e^{-\alpha_n(a-z)}) + B_n(e^{\alpha_n z} - e^{-\alpha_n z})}{e^{\alpha_n a} - e^{-\alpha_n a}} \cdot I_0(\alpha_n)$$

formata dalla parte lineare e dall'ultimo termine di V in (5) facendovi $r = 1$.

La funzione $\psi(z) - F(z)$ si annulla per le (1), (2), (3) per $z = 0$ e $z = a$: sviluppiamola in serie di Fourier (prolungandola come funzione dispari tra 0 e $-a$): avremo

$$(8) \qquad \psi(z) - F(z) = \sum_1^\infty E'_n \operatorname{sen} \frac{n\pi z}{a}.$$

Se vogliamo quindi che sia soddisfatta la prima delle (3) dovrà essere

$$(9) \qquad E_n = \frac{E'_n}{I_0\left(i\dfrac{n\pi}{a}\right)},$$

e con ciò il problema è formalmente risolto dalla (5) tenendo conto delle (6) (6') (7) (8) (9).

2. Validità della soluzione. — Dimostriamo in primo luogo che la serie (7) è equiconvergente nell'intervallo $(0, a)$ inclusi gli estremi. Spezziamo perciò la serie nella somma di quattro altre di cui la prima è

$$(10) \qquad \sum A_n I_0(\alpha_n) \cdot H_n \quad \text{con} \quad H_n = \frac{e^{\alpha_n(a-z)}}{e^{\alpha_n a} - e^{-\alpha_n a}}.$$

I numeri H_n sono positivi, qualunque sia z $(0 \leq z \leq a)$ e decrescenti al crescere di n, come si vede facilmente osservando che $H_n = e^{-\alpha_n z} \cdot K_n$ con

$$K_n = \frac{e^{\alpha_n a}}{e^{\alpha_n a} - e^{-\alpha_n a}},$$

e che

$$K_{n+1} - K_n = -\frac{e^{(\alpha_{n+1} - \alpha_n)a} - e^{-(\alpha_{n+1} - \alpha_n)a}}{(e^{\alpha_{n+1}a} - e^{-\alpha_{n+1}a})(e^{\alpha_n a} - e^{-\alpha_n a})} < 0.$$

Consideriamo allora la serie convergente $\sum A_n I_0(\alpha_n)$ e, preso ε piccolo a piacere, determiniamo n in modo che

$$\left| \sum_{i=1}^p A_{n+i} I_0(\alpha_{n+i}) \right| < \frac{\varepsilon}{K_1} \qquad (p = 1, 2, \ldots).$$

Applicando il lemma di Abel [1], avremo

$$(11) \qquad \left| \sum_{i=1}^{p} A_{n+i}\, I_0(\alpha_{n+i})\, H_{n+i} \right| < \frac{\varepsilon}{K_1} H_{n+1} < \varepsilon \ , \quad (p = 1, 2, \ldots)$$

per la relazione precedente e perchè $\frac{H_{n+1}}{K_1} < 1$: quindi la (10) è equiconvergente per $0 \leq z \leq a$. Ragionando in modo analogo per le altre tre serie si dimostra completamente la nostra asserzione.

La stessa dimostrazione leggermente modificata mi permette di asserire che la seconda serie nella (5) è equiconvergente in tutto il rettangolo $0 \leq r \leq 1$, $0 \leq z \leq a$.

Ritornando alla (7), questa come serie equiconvergente di funzioni continue rappresenta una funzione continua: questa è altresì sviluppabile in serie di Fourier. Infatti o essa non ha infiniti massimi e minimi e quindi, pel noto criterio di Dirichlet, è sviluppabile; nel caso contrario basta dimostrare, seguendo un criterio del Lipsichtz [2], che in ciascuno di questi eventuali punti β si ha per δ sufficientemente piccolo

$$| F(\beta + \delta) - F(\beta) | < A\delta^{\alpha}$$

essendo A una costante e α, un numero positivo. La dimostrazione non è difficile applicando i criterî precedenti, quindi per brevità la tralascio.

Ammesso questo, sarà valida la (8) e la serie del secondo membro sarà equiconvergente nell'intervallo $0 \leq z \leq a$. Ma allora la seconda serie nella (5) diventa

$$(12) \qquad \sum E'_n \operatorname{sen} \frac{n\pi z}{a} \cdot \frac{I_0\left(\frac{in\pi r}{a}\right)}{I_0\left(\frac{in\pi}{a}\right)} .$$

Ora, questa serie si ottiene dalla (8) moltiplicandone i termini per i numeri

$$L_n = \frac{I_0\left(\frac{in\pi r}{a}\right)}{I_0\left(\frac{in\pi}{a}\right)} .$$

Si osservi che

$$0 < L_n \leq 1 \qquad (0 \leq r \leq 1) ,$$

e che inoltre

$$L_{n+1} \leq L_n ,$$

[1] Vedi Cesàro, *Corso di Analisi algebrica*. Torino, 1884, pag. 126.
[2] Vedi Picard, *Traité d'Analyse*, tomo I, 2ª ediz., pag. 245.

come si trova facilmente calcolando da $\frac{dL_n}{dn}$ (si considera n come variabile continua) e facendo vedere che essa è negativa: basta perciò sostituire a $I_0(ix)$ la sua espressione $\sum_{\lambda=1}^{\infty} \frac{1}{(\lambda!)^2}\left(\frac{x}{2}\right)^{2\lambda}$.

Ma allora, applicando il lemma di Abel, si può dimostrare che la serie (12) è equiconvergente nel rettangolo $0 \leq r \leq 1$, $0 \leq z \leq a$: quindi la nostra (5), che è formata di serie equiconvergenti i cui termini sono funzioni armoniche, è, come è ben noto, una funzione armonica e soddisfa alle condizioni poste.

Chimica. — *Sulla trasformazione della magnesia leggera in magnesia pesante* (¹). Nota di N. Parravano e C. Mazzetti, presentata dal Socio E. Paternò (²).

È noto che la magnesia, quando venga calcinata, subisce una forte diminuzione di volume. Nei refrattari di magnesia che si usano nei forni metallurgici deve perciò, prima della messa in opera, provocarsi la trasformazione di MgO dalla forma meno densa in quella più densa.

Questa trasformazione è irreversibile ed è stata attribuita all'esistenza di due forme di ossido di magnesio le quali, oltre al peso specifico, hanno pure altre proprietà fisiche e chimiche differenti (³).

In che rapporto le due forme stiano fra loro e in che condizioni esse siano trasformabili l'una nell'altra non si conosce però con precisione. La prescrizione da tutti seguita di cuocere la magnesite a temperatura elevata prima di foggiarne refrattarî indica che la trasformazione della varietà leggera in quella pesante richiede un'alta temperatura per compiersi, mentre d'altra parte le misure di densità fatte da Ditte su MgO mantenuto a temperature crescenti da 350° a 1200° dimostrano la possibilità che la forma pesante si origini da quella leggera a temperature molto più basse di quelle comunemente adoperate in pratica per cuocere la magnesite.

La conoscenza delle condizioni esatte in cui si compie la trasformazione e delle cause che possono agire favorendola od ostacolandola sarebbe di notevole interesse, perchè essa potrebbe infatti dare utili indicazioni sul modo migliore come eseguire in pratica la cottura della magnesia.

(¹) Lavoro eseguito nell'Istituto chimico della R. Università di Roma.

(²) Presentata nella seduta del 2 gennaio 1921.

(³) Ditte, C. R., *73*, 111, 191, 270 (1871); id., *76*, 108 (1877); Anderson, J. Ch. S., *87*, 257 (1905); Mellor, Trans. Cera. Soc., *16*, 1918, parte I, 89; Fearnsides, id. id., pag. 97.