

ATTI
DELLA
REALE ACCADEMIA NAZIONALE
DEI LINCEI

ANNO CCCXVIII.
1921

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXX.

1° SEMESTRE.



ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI
PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1921

RENDICONTI
DELLE SEDUTE
DELLA REALE ACCADEMIA NAZIONALE
DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

~~~~~  
Seduta del 6 febbraio 1921.

V. VOLTERRA, Vicepresidente.

MEMORIE E NOTE DI SOCI

Matematica. — *Sui fochi di 2° ordine dei sistemi infiniti di piani, e sulle curve iperspaziali con una doppia infinità di piani plurisecanti.* Nota del Socio C. SEGRE.

1. Nella Memoria *Preliminari di una teoria delle varietà luoghi di spazi* (Rendic. Circ. mat. di Palermo, tomo 30, 1910, pag. 87) io avevo studiato principalmente le questioni legate a quelli che possiamo chiamare *fochi di 1° ordine*, per un sistema infinito di spazi: ossia punti, per ognuno dei quali passano *due* spazi del sistema infinitamente vicini. Ora si presentano dei problemi, la cui trattazione porta a considerare dei *fochi di 2° ordine* (o d'ordine superiore), cioè punti d'incontro di *tre* (o più) spazi successivi. In questa Nota, ed in altre che verranno poi, mi occuperò appunto di tali problemi.

2. Consideriamo, per ora, un sistema  $\Sigma \infty^2$  di piani, immerso in  $S_4$ . Dette  $x_1, x_2, x_3, x_4$  le coordinate di punti in questo spazio, rappresentiamo i piani colle equazioni  $x_3 = \alpha, x_4 = \beta$ , ove  $\alpha \equiv a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2, \beta \equiv b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2$ ; i coefficienti  $a_i, b_i$  essendo date funzioni dei due parametri  $u, v$ , da cui dipendono i piani di  $\Sigma$ . Così le derivate di  $\alpha, \beta$  rispetto a  $u, v$  (derivate che indicheremo con  $\alpha^u, \alpha^v$ , ecc.) saranno anche esse polinomi lineari in  $x_1, x_2$ .

Se un punto  $x$  è comune al piano  $(u, v)$  e a  $(u + du, v + dv)$ , e quindi è foco (di 1° ordine, in generale) per  $\Sigma$ , varranno, insieme colle

$x_3 = \alpha$ ,  $x_4 = \beta$ , le  $d\alpha = 0$ ,  $d\beta = 0$ , cioè:

$$(1) \quad \alpha^u du + \alpha^v dv = 0, \quad \beta^u du + \beta^v dv = 0,$$

e quindi:

$$(2) \quad J \equiv \alpha^u \beta^v - \alpha^v \beta^u = 0.$$

Questa equazione è di 2° grado in  $x_1, x_2$ . Dunque, com'è ben noto, i fochi (di 1° ordine) di un piano di  $\Sigma$  formano in generale una conica. La diremo *conica focale* del piano.

3. Se un punto è foco di 2° ordine, ossia sta su 3 piani infinitamente vicini  $\pi, \pi', \pi''$  di  $\Sigma$ , esso, perchè è su  $\pi, \pi'$ , sta sulla conica focale di  $\pi$ ; e, perchè è su  $\pi', \pi''$ , sta sulla conica focale di  $\pi'$ . Per avere dunque nel piano ( $u, v$ ) un foco di 2° ordine, basterà scrivere che il punto  $x$  sta sulla conica focale di questo piano, e su quella del piano ( $u + du, v + dv$ ). La 1ª condizione dà:

$$(3) \quad x_3 = \alpha, \quad x_4 = \beta, \quad J = 0;$$

la 2ª dà, come al n. 2, le (1), e in più  $J^u du + J^v dv = 0$ . Ne segue:

$$(4) \quad \begin{vmatrix} \alpha^u & \beta^u & J^u \\ \alpha^v & \beta^v & J^v \end{vmatrix} = 0.$$

Sarà perciò quest'ultima equazione (doppia), che, insieme colle (3), caratterizzerà i fochi di 2° ordine (1).

Quella matrice, con due colonne lineari in  $x_1, x_2$  e una quadratica, è annullata da 5 punti. Dunque: *su ogni piano di  $\Sigma$  vi sono in generale 5 fochi di 2° ordine (sulla conica focale)*.

4. Dimostriamo ora che: se *tutti* i punti delle coniche focali di  $\Sigma$  son fochi di 2° ordine, il loro luogo non è una  $V_3$ , ma bensì una superficie (o una linea, se  $\Sigma$  si compone dei piani di  $S_4$  passanti per una stessa retta).

Possiamo pensare i punti  $x$  di quelle coniche (3) come funzioni di tre variabili, cioè dei parametri  $u, v$  che fissano il piano, e della coordinata  $x_1$ . La terza delle equazioni (3) determina anzi tutto  $x_2$  come funzione implicita di  $u, v, x_1$ ; mentre le prime due danno  $x_3$  e  $x_4$  in funzione di  $u, v$ ,

(1) Si può anche ottenere la (4) così. I piani di  $\Sigma$  passanti per un dato punto  $x$  corrispondono alle soluzioni  $u, v$  comuni alle due equazioni  $x_3 = \alpha, x_4 = \beta$ , nelle quali si sia posto quel punto dato. Rappresentando  $u, v$  come coordinate di punto in un piano ausiliario, sicchè le dette equazioni avranno per immagini due linee, si vede che una soluzione ( $u, v$ ) sarà *doppia* (almeno), se dalle due equazioni si trae lo stesso valore per  $dv/du$ , e sarà *tripia* se inoltre vien lo stesso valore per  $d^2v/du^2$ . La 1ª ipotesi dà subito la (2). La 2ª porta ad una relazione, che, presa insieme colla (2), risulta equivalente a (4).

$x_1, x_2$ , e quindi anche di  $u, v, x_1$ . Basterà provare che, se queste funzioni verificano le (4), la matrice funzionale delle coordinate  $x_1, x_2, x_3, x_4$ , riguardate così come funzioni di  $x_1, u, v$ , è nulla; ossia che:

$$\begin{vmatrix} 1 & \frac{\partial x_2}{\partial x_1} & a_1 + a_2 \frac{\partial x_2}{\partial x_1} & b_1 + b_2 \frac{\partial x_2}{\partial x_1} \\ 0 & \frac{\partial x_2}{\partial u} & \alpha^u + a_2 \frac{\partial x_2}{\partial u} & \beta^u + b_2 \frac{\partial x_2}{\partial u} \\ 0 & \frac{\partial x_2}{\partial v} & \alpha^v + a_2 \frac{\partial x_2}{\partial v} & \beta^v + b_2 \frac{\partial x_2}{\partial v} \end{vmatrix} = 0.$$

Ciò equivale a dire che è zero la matrice che si ottiene da questa sopprimendo la 1<sup>a</sup> orizzontale e la 1<sup>a</sup> verticale; ossia, semplificando, la matrice:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x_2}{\partial u} & \alpha^u & \beta^u \\ \frac{\partial x_2}{\partial v} & \alpha^v & \beta^v \end{vmatrix}.$$

Le derivate di  $x_2$  rispetto a  $u$  e  $v$ , che qui compaiono, si calcolano derivando l'equazione  $J = 0$  rispetto a queste variabili. Risulta:

$$\frac{\partial J}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial u} + J^u = 0, \quad \frac{\partial J}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial v} + J^v = 0;$$

sicchè, sostituendo nell'ultima matrice, questa risulta nulla, se ha luogo la (4): il che appunto avviene, per ipotesi. —

Se le coniche focali dei piani generici di  $\Sigma$  non si spezzano, la superficie che viene a contenere queste  $\infty^2$  coniche non potrà essere altro, com'è noto, che la  $F^4$  proiezione di quella di Veronese, o la  $F^3$  di  $S_4$  (rigata). Dunque: *Son solo i sistemi  $\infty^2$  di piani costituiti dai piani delle coniche di queste due superficie quelli per cui avviene che tutti i punti delle coniche focali sian fochi di 2<sup>o</sup> ordine, senza che queste coniche focali si spezzino* (1).

5. Una curva  $\Gamma$ , appartenente ad  $S_n$ , con  $n > 3$ , sia tale che esistano  $\infty^2$  piani che la seghino in 6 (o più) punti. Proiettando  $\Gamma$  (se  $n > 4$ ) su un  $S_4$  da un  $S_{n-5}$  generico, si ottiene una curva  $C$ , che godrà della stessa

(1) Questa riserva è indispensabile. Le  $\infty^2$  coniche, spezzandosi in coppie di rette, potrebbero costituire una superficie di  $S_4$  anche nei seguenti modi: l'insieme di una rigata con direttrice piana e del piano di questa (le  $\infty^2$  coniche componendosi di una generatrice della rigata e di una retta del piano, incidenti); oppure l'insieme di due coni, distinti o no, collo stesso vertice, e che possono anche ridursi a piani (le coniche componendosi con due generatrici risp. dei due coni).

proprietà: i punti d'appoggio dei piani seiscanti di  $C$  essendo proiezioni dei punti d'appoggio di quelli di  $\Gamma$ .

Nel sistema  $\infty^2 \Sigma$  costituito da quei piani di  $S_4$  seiscanti di  $C$ , ogni piano avrà i 6 (o più) punti d'incontro con  $C$  come fochi di 2° ordine: poichè, essendo  $\Sigma \infty^2$ , dovranno per ogni punto di  $C$  passare  $\infty^1$  suoi piani, e quindi quanti si vogliono piani infinitamente vicini. Ora, pel n. 3, i fochi di 2° ordine di ogni piano sono in generale 5 punti della conica focale: se no, infiniti, che costituiranno tutta quella conica, ove essa non si spezza. Nelle nostre ipotesi, avendosi almeno 6 fochi di 2° ordine, dovrà appunto accadere che la conica focale di un piano generico di  $\Sigma$ , se è irriducibile, sia luogo di fochi di 2° ordine. Se invece essa si spezza, i 6 punti d'appoggio di ogni piano su  $C$  dovranno distribuirsi sulle due rette componenti la conica; sicchè  $C$ , e quindi anche  $\Gamma$ , starà su una rigata di pluriseccanti (almeno triseccanti). Nel 1° caso, della irriducibilità, le  $\infty^2$  coniche focali, e quindi anche la linea  $C$ , stanno, pel teorema del n. 4, su una superficie  $F^4$  proiezione di quella di Veronese, o su una  $F^2$ : i piani seiscanti essendo quelli delle  $\infty^2$  coniche di queste superficie. Risalendo a  $S_n$ , se  $n > 4$ , abbiamo che i 6 (o più) punti d'appoggio degli  $\infty^2$  piani pluriseccanti di  $\Gamma$  sono su coniche, il cui luogo ha per proiezione generica in  $S_4$  una delle due dette superficie. Sarà dunque il luogo stesso una superficie; e anzi, del medesimo ordine di quelle. Concludiamo (!):

*Se una curva iperspaziale ammette  $\infty^2$  piani che la incontrino in 6 punti (almeno), ma non infinite rette triseccanti, essa: o appartiene a  $S_5$ , e sta su una superficie  $F^4$  di Veronese; oppure appartiene a  $S_4$ , e sta sulla  $F^4$  proiezione della superficie di Veronese, od anche sulla  $F^3$  rigata: i piani pluriseccanti essendo quelli delle  $\infty^2$  coniche di queste superficie.*

Si avverta che per le curve con  $\infty^2$  piani 5-seccanti la proposizione ora ottenuta non sarebbe più vera: come si potrà riconoscere sulle curve composte che incontreremo.

6. Finirò coll'osservare brevemente (lasciando ad altri di sviluppare questi cenni) come la considerazione dei fochi di 2° ordine permetta di giungere facilmente a determinare per l' $S_4$  tutti i casi possibili di sistemi algebrici  $\infty^2$  di piani del 2° ordine, cioè tali che per un punto generico di  $S_4$  ne passino due. (Non dico di quelli del 1° ordine, perchè — molto ovvii — son già conosciuti da tempo).

Basta notare che in un siffatto sistema  $\Sigma$  ogni foco di 2° ordine, trovandosi su 3 piani infinitamente vicini di  $\Sigma$ , dovrà stare di conseguenza su infiniti; e precisamente su  $\infty^1$ , se non è comune a tutti i piani di  $\Sigma$ :

(!) La questione qui risolta mi era stata posta dall'amico Castelmnuovo. — Tratterò poi anche un problema più generale.

nel qual caso questi si otterrebbero proiettando da quel punto le rette di una congruenza di 2° ordine di  $S_3$ . Potranno dunque aversi solo più questi due casi: 1° Sono  $\infty^2$  i fochi di 2° ordine; ma essendo anche  $\infty^2$  i piani, bisognerà che ogni piano abbia  $\infty^1$  fochi di 2° ordine. Ne segue che la conica focale di ciascun piano si spezza: se no, si tratterebbe (n. 4) dei sistemi degli  $\infty^2$  piani delle coniche di una  $F^3$  o  $F^4$ , i quali sistemi sono risp. di 1° e di 3° ordine, non del 2°. Su ogni piano si avranno così una o due rette luoghi di fochi di 2° ordine; e queste rette riempiono, per ipotesi, una superficie. Se sono  $\infty^2$ , daranno un piano incontrato in rette da tutti i piani di  $\Sigma$ ; se sono  $\infty^1$ , per ognuna di esse passeranno  $\infty^1$  piani di  $\Sigma$ . 2° I fochi di 2° ordine (o almeno le posizioni di un tal foco al variare del piano di  $\Sigma$ ) son solo  $\infty^1$ , ossia hanno per luogo una linea algebrica segata in 5 punti (o meno, se non si tratta di tutti i fochi di 2° ordine) dai piani di  $\Sigma$ .

Questo 2° caso offre uno speciale interesse. Si parta, ad esempio, da una linea algebrica  $L$ , che può essere riducibile, appartenente ad  $S_4$ , della quale si sappia che la proiezione generica su  $S_3$  ammette precisamente 2 quadrisecanti. Allora si potrà asserire che gli  $\infty^2$  piani quadrisecanti di  $L$  (i quali, per l'ipotesi, formeranno un sistema di 2° ordine) incontreranno certo di conseguenza in un punto (il 5° foco di 2° ordine) un'altra linea: che però potrebbe essere indeterminata, su una superficie incontrata secondo linee da tutti quei piani.

Rientra in questa proposizione il noto teorema che gli  $\infty^2$  piani di  $S_4$ , appoggiati a 4 rette generiche incontrano di conseguenza una 5ª retta. Anche i piani che incontrano in 3 punti una quartica razionale normale e si appoggiano a una retta generica, formano un sistema  $\infty^2$  di 2° ordine; e quindi dovranno incontrare un'altra linea, che risulta facilmente essere ancora una quartica. E altri casi sono stati incontrati, con tutt'altro metodo, da M. Pieri (1).

(1) Sulla geometria proiettiva delle forme di 4ª specie. Giorn. di matem., vol. 28 (1890), pag. 209. I piani che incontrano una  $C^4$  razionale normale e 3 sue corde, incontrano un'altra  $C^4$ . — I piani che incontrano una  $C^3$  sghemba, due rette appoggiate ad essa, e una sua corda, incontrano un'altra  $C^3$ . — I piani che s'appoggiano a 3 rette e ad una conica incidente a due di esse, incontrano un'altra conica.