ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA NAZIONALE

DEI LINCEI

ANNO CCCXVIII.

1921

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXX.

1° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1921

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Rendiconto del 20 febbraio 1921.

MEMORIE E NOTE DI SOCI

Matematica. — *Sulle funzioni abeliane. II: La geometria sulle varietà abeliane.* Nota del Socio G. CASTELNUOVO [1].

5. Conviene illuminare i risultati della Nota precedente [2] col linguaggio della geometria algebrica. Formiamo perciò, mediante rapporti convenienti di funzioni intermediarie relative alla matrice (1), $p+1$ funzioni abeliane

$$x_i = f_i(u_1, \dots, u_p) = f_i((u)) \qquad (i = 1, 2, \dots, p+1) \tag{21}$$

cioè funzioni meromorfe al finito, aventi i $2p$ gruppi di periodi forniti dalla detta matrice. E ricordiamo che tra le x_i passa sempre una relazione algebrica

$$V(x_1, \dots, x_{p+1}) = 0, \tag{22}$$

la quale rappresenta una varietà *abeliana* V_p, di uno spazio a $p+1$ dimensioni. Supporremo che la corrispondenza tra il punto (21) della V_p ed il gruppo $(u_1, \dots, u_p)$ di valori dei parametri sia biunivoca.

In questa ipotesi, data la matrice (1), la varietà abeliana V_p è determinata, a meno di una trasformazione birazionale Viceversa, data la V_p, è determinata la matrice (1) od una matrice *equivalente* (Scorza), cioè dedotta dalla (1) mediante combinazioni lineari tra le orizzontali (che por-

(1) Presentata nella seduta del 6 febbraio 1921.

(2) Questi Rendiconti, vol. XXX, 1° sem., fasc. 2°, pag. 50; essa verrà citata con I seguito dal n. del § o della formola.

tano a sostituire ai parametri u nuovi parametri) e mediante sostituzioni lineari a coefficienti interi, unimodulari, tra le verticali (che portano a sostituire un sistema di periodi primitivi con un nuovo sistema di periodi primitivi).

Ne viene che le trasformazioni eseguite in I, 3 non alterano la varietà V_p, ma permettono di introdurre in questa un sistema più comodo di parametri U ed un più semplice sistema di periodi (13). Al contrario, la trasformazione di parametri (I (16)), $U_l = \delta v_l$, quando $\delta > 1$, e l'adozione della matrice di periodi (17) porta a rappresentare i punti U_l della varietà V_p sui gruppi di una involuzione d'ordine δ^{p-1} appartenente ad una nuova varietà abeliana W_p descritta dal punto v_l; il gruppo generico della involuzione essendo dato da $\left(v_1 + \frac{a_1 e_1}{\delta}, \dots, v_p + \frac{a_p e_p}{\delta}\right)$, ove a_l percorre i numeri $0, 1, \dots, \frac{\delta}{e_l} - 1$.

Premesso ciò, riprendiamo la funzione intermediaria $\varphi((u))$ o $\varphi_2((U))$ (I, nn. 1-3). L'equazione $\varphi = 0$ o $\varphi_2 = 0$ rappresenta una varietà algebrica Φ a $p - 1$ dimensioni entro V_p, *varietà intermediaria*. La corrispondenza algebrica $(1, \delta^{p-1})$ ora considerata tra V_p e W_p muta la Φ in una nuova varietà intermediaria Θ di W_p, appartenente all'involuzione suddetta; la quale varietà è rappresentata dall'annullarsi della funzione Θ d'ordine δ data dalle formole (18) e (19), e può quindi chiamarsi *varietà* Θ d'ordine δ.

Con ciò il risultato si presenta così:

Data entro una varietà abeliana V_p *una varietà intermedioria* Φ (a $p - 1$ dimensioni) *di determinante* $\delta > 0$, *è sempre possibile trasformare la* V_p *in una nuova varietà abeliana* W_p *con una trasformazione razionale* $(1, \delta^{p-1})$, *in guisa che la* Φ *si muti in una varietà* Θ *d'ordine* δ *della* W_p. E viceversa, ad ogni varietà Θ d'ordine δ di W_p appartenente alla involuzione ivi esistente corrisponde una varietà intermediaria di V_p.

Ora una funzione Θ d'ordine δ contiene linearmente δ^p costanti arbitrarie; ma se la Θ è costretta a verificare le condizioni I (19), il numero di queste costanti si riduce a $e_1 e_2 \dots e_p = \delta$ [1]. Sicchè la varietà Θ di W_p dell'ultimo teorema, e quindi anche la Φ di V_p, appartiene ad un sistema lineare $\infty^{\delta-1}$. Se però insieme alla Φ si considerano le sue trasformate, entro V_p, mediante le ∞^p trasformazioni ordinarie di 2ª specie $u'_l = u_l +$ cost., si conclude:

Una varietà intermediaria di determinante δ, *entro la varietà abeliana* V_p, *appartiene ad un sistema algebrico continuo* $\infty^{p+\delta-1}$ *costituito da* ∞^p *sistemi lineari di dimensione* $\delta - 1$.

p *varietà generiche del sistema continuo hanno* $p!\,\delta$ *punti comuni*. Infatti p varietà Θ di ordine δ di W_p hanno in comune (Poincaré, Wirtinger)

[1] Cfr. Krazer, *Lehrbuch der Thetafunktionen* (Teubner, 1903), pag. 126.

$p!\,\delta^p$ punti, i quali si distribuiscono, nel nostro caso, in $p!\,\delta$ gruppi della involuzione esistente su W_p. A questi gruppi corrispondono altrettanti punti di V_p comuni a p varietà Φ ([1]).

6. Supponiamo ora di conoscere due funzioni intermediarie $\varphi_1((u))$, $\varphi_2((u))$ relative alla stessa matrice (1); siano δ_1, δ_2 i due loro determinanti, non nulli, e $m_{ik}^{(1)}$, $m_{ik}^{(2)}$ i loro interi caratteristici. Nel caso, di maggiore interesse, che le $m_{ik}^{(1)}$ non siano proporzionali alle $m_{ik}^{(2)}$, la matrice (1) possiede due diverse forme bilineari alternate (I, n. 2), ed è quindi singolare (Scorza).

Presi come esponenti due numeri interi positivi r_1, r_2, formiamo la funzione

$$\varphi = \varphi_1^{r_1}\varphi_2^{r_2} \tag{23}$$

che è pure intermediaria, coi periodi (1), e i numeri caratteristici $r_1 m_{ik}^{(1)} + r_2 m_{ik}^{(2)}$. Il determinante δ di φ è il pfaffiano, in valore assoluto, della matrice quadrata $\| r_1 m_{ik}^{(1)} + r_2 m_{ik}^{(2)} \|$; è quindi una forma d'ordine p in r_1, r_2:

$$\delta = \mathrm{I}_0 r_1^p + \binom{p}{1}\mathrm{I}_1 r_1^{p-1} r_2 + \binom{p}{2}\mathrm{I}_2 r_1^{p-2} r_2^2 + \cdots + \mathrm{I}_p r_2^p, \tag{24}$$

dove $\mathrm{I}_0 = \delta_1$, $\mathrm{I}_p = \delta_2$.

Se Φ_1, Φ_2 sono le varietà intermediarie a $p-1$ dimensioni, in V_p, rappresentate da $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = 0$, la varietà Φ rappresentata da $\varphi = 0$ appartiene a un sistema continuo che, con le notazioni della geometria algebrica, si suole indicare col simbolo $\{r_1\Phi_1 + r_2\Phi_2\}$.

Il numero delle intersezioni di p varietà generiche del sistema è $p!\,\delta$ (n. 5). D'altra parte il numero stesso è dato simbolicamente da

$$[r_1\Phi_1 + r_2\Phi_2]^p = r_1^p[\Phi_1^p] + \binom{p}{1} r_1^{p-1} r_2 [\Phi_1^{p-1}\Phi_2] + \cdots + r_2^p[\Phi_2^p], \tag{25}$$

dove $[\Phi_1^{p-h}\Phi_2^h]$ indica il numero delle intersezioni di $p-h$ varietà appartenenti al sistema $\{\Phi_1\}$ ed h varietà appartenenti al sistema $\{\Phi_2\}$. Poichè la espressione (25) ha lo stesso valore della (24) moltiplicata per $p!$ in corrispondenza ad *ogni* coppia di numeri interi positivi r_1, r_2, segue che

$$[\Phi_1^{p-h}\Phi_2^h] = p!\,\mathrm{I}_h. \tag{26}$$

Quindi *i coefficienti della forma binaria* (24), che sono invarianti simultanei delle due funzioni intermediarie φ_1, φ_2, *hanno il significato geometrico assegnato dalle* (26).

7. Il risultato si può facilmente estendere al caso di tre o più funzioni intermediarie. La massima generalità si ottiene colla seguente considerazione.

([1]) Il Lefschetz nella Memoria inedita già citata arriva a questo e al successivo risultato mediante considerazioni di *Analysis situs*.

Si supponga che l'*indice di singolarità* (Scorza) della matrice (1) sia $\varkappa$, ed in conseguenza che la (1) possegga $\varkappa + 1$ forme alternate (principali) di Riemann linearmente indipendenti. Siano

$$\Sigma\, m_{ik}^{(l)}\, \xi_i\, \eta_k \qquad (l = 0, 1, \dots, \varkappa) \tag{27}$$

le forme reciproche di quelle, scelte in modo da costituire una *base minima*, in modo adunque che ogni altra forma consimile relativa alla matrice (1) possa ottenersi come combinazione lineare *a coefficienti interi*, r_l, delle (27) (¹). Allora, detta φ_l una funzione intermediaria cogli interi caratteristici $m_{ik}^{(l)}$, e detta Φ_l la varietà rappresentata entro V_p da $\varphi_l((u)) = 0$, risulta che $\Phi_0, \Phi_1, \dots, \Phi_\varkappa$ costituiscono una *base minima* per le varietà intermediarie entro V_p. Al variar degli interi r_l il sistema continuo

$$\{ r_0 \Phi_0 + r_1 \Phi_1 + \cdots + r_\varkappa \Phi_\varkappa \} \tag{28}$$

fornisce tutte le varietà intermediarie di V_p. Anzi *fornisce tutte le varietà algebriche a $p-1$ dimensioni di* V_p, in virtù di un importante teorema con cui il Lefschetz, nella Memoria inedita nominata, estende a V_p un risultato che Appell ed Humbert avevano stabilito per le superficie iperellittiche.

Per ottenere la più generale espressione del teorema di Bézout entro V_p si formi il determinante

$$\| r_0 m_{ik}^{(0)} + \cdots + r_\varkappa m_{ik}^{(\varkappa)} \|.$$

Il pfaffiano di questo è una forma algebrica di grado p nelle $r_0, \dots, r_\varkappa$; la indicheremo, scelto opportunamente il segno, con

$$\Sigma \frac{p!}{h_0! \dots h_\varkappa!} I_{h_0 \dots h_\varkappa} r_0^{h_0} \cdots r_\varkappa^{h_\varkappa},$$

la somma essendo estesa a tutti i gruppi di numeri interi non negativi $h_0, \dots, h_\varkappa$ che dànno per somma p. Ora si trova col ragionamento del numero 6 che

$$[\Phi_0^{h_0} \dots \Phi_\varkappa^{h_\varkappa}] = p!\, I_{h_0 \dots h_\varkappa},$$

dove il simbolo a primo membro indica il numero delle intersezioni di $p = h_0 + \cdots + h_\varkappa$ varietà a $p-1$ dimensioni, di cui h_0 scelte nel sistema continuo $\{\Phi_0\}, \dots, h_\varkappa$ scelte nel sistema $\{\Phi_\varkappa\}$.

8. Le funzioni intermediarie considerate sinora hanno il determinante $\delta > 0$. Accenniamo rapidamente alle particolarità che si presentano se $\delta = 0$ e quindi $\| m_{ik} \| = 0$. Per limitarci al solo caso che interessi, supporremo che la (1) sia ancora *una matrice di Riemann*, cioè che essa possegga,

(¹) Scorza (loc. cit. in I), § 3 della Parte prima.

oltre la forma alternata (7) che è ora degenere, una forma alternata non degenere; la matrice è in tal caso (Scorza) singolare ed impura ed è sempre collegata con una varietà abeliana V_p. Supponiamo poi che la caratteristica del determinante $\| m_{ik} \|$ sia $2q$ dove $0 < q < p$.

Allora con una opportuna trasformazione unimodulare sui periodi (1) e colla sostituzione, in luogo delle primitive variabili u, di convenienti loro combinazioni lineari U (cfr. I, n. 3), si trova che, dei p integrali di differenziale totale $\int d\mathrm{U}_l$ annessi alla varietà V_p, i primi q costituiscono un sistema regolare di q integrali riducibili con $2q$ periodi. Le equazioni $\mathrm{U}_1 = \text{cost.}, \ldots, \mathrm{U}_q = \text{cost.}$ definiscono entro V_p una congruenza ∞^q di varietà algebriche w a $p - q$ dimensioni, di cui una sola passa per un punto generico di V_p. Le stesse trasformazioni applicate alla primitiva funzione intermediaria $\varphi((u))$, seguite, se occorre, dalla moltiplicazione per un esponenziale ad esponente quadratico nelle U, mutano la φ in una nuova funzione intermediaria $\varphi_2(\mathrm{U}_1, \ldots, \mathrm{U}_p)$ che si riconosce dipendere dalle sole variabili $\mathrm{U}_1, \ldots, \mathrm{U}_q$. Si conclude dunque che *la varietà intermediaria a $p - 1$ dimensioni rappresentata dalla equazione $\varphi((u)) = 0$ o $\varphi_2((\mathrm{U})) = 0$ è, nelle ipotesi attuali, formata da ∞^{q-1} varietà w della congruenza suddetta.*

Paleontologia. — *Silicospongie fossili della Liguria occidentale.* Nota del Socio Carlo De Stefani [1].

IV.

Eocene.

Strati inferiori.

Le rocce Triassiche e quelle ritenute Infraliassiche sono coperte da grande massa di rocce che io ritengo Eoceniche, tanto nei versanti della Polcevera e della Scrivia, quanto nella regione situata più ad Occidente. Le rocce di quest'ultima regione sono da altri attribuite al Permiano e da altri al Giura. Descriverò i fossili trovativi in ambedue le regioni; ma primieramente indicherò quelli trovati negli strati più antichi immediatamente sovrastanti al Trias ed all'Infralias, poichè, per avventura, potrebbero appartenere ad età geologica alquanto diversa da quella degli strati più alti. Debbo però soggiungere che io mi sono occupato a cercare fossili solo nella regione occidentale cristallina, quindi anche negli strati più alti di essa, ma non già in quelli più alti della regione eocenica orientale, meno o punto metamorfica, la cui età non è contestata.

[1] Presentata nella seduta del 16 gennaio 1921.