ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA NAZIONALE
DEI LINCEI

ANNO CCCXVIII.

1921

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXX.

2° Semestre.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1921

Da un altro campione ho isolato dei cristallini grigi, nei quali $2\,V_{n_p}$ è stato trovato variabile, in diversi individui, fra $94^\circ 30'$ e $91^\circ 30'$ (per la luce del sodio): il loro contenuto in Fe_2O_3 (compreso FeO, presente, del resto, in quantità molto piccola) ascende a 6 % circa. Si tratta, perciò, di cristalli analoghi, per composizione e valore di $2\,V_{n_p}$ a quelli di Camp-Ras nell'Ariège. Anche nel vallone di St. Barthélemy, come a Monte Tovo ed alla Goslerwand, si trovano associati termini veramente clinozoisitici nel senso di Weinschenk, ad altri che sono, sì, otticamente positivi, ma che si presentano notevolmente più ferriferi di quel che dovrebbero.

Ricorderò ancora un notevole cristallo del Monte Bianco. Si tratta di un bel geminato secondo la solita legge: piano di geminazione $\{100\}$, il quale raggiunge 1,5 cm. nella direzione di b. I due individui del geminato non sono di uguale colore: uno è di un bel giallo ambrato, l'altro sensibilmente più chiaro. Le mie ricerche sono state eseguite su un frammento dell'individuo giallo ambrato. Mediante un prisma naturale $(001)\widehat{\ }(10\bar{1})$ ed il monocromatore di Voigt, io ho trovato

	B	C	D	E	F
$n_m =$	1.7192	1.7209	1.7259	1.7324	1.7388

MEMORIE E NOTE PRESENTATE DA SOCI

Matematica — *Sopra un'equazione funzionale.* Nota IV di Pia Nalli, presentata dal Corrisp. G. Bagnera [1].

4. Risulta dalla (6) della Nota precedente che all'interno del cerchio $|\lambda| \leq \dfrac{1}{\alpha|g(0)|}$ la (4) ha una ed una sola soluzione derivabile in $(0\,,a)$ che si può mettere sotto la forma

$$u(x) = \frac{f(0)}{1-\lambda g(0)}\,\varphi_0(x) + \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n f_{1,n}(x)\,. \tag{8}$$

Potremmo anche dire che nel detto cerchio la funzione $[1-\lambda g(0)]\,u(x)$ si può rappresentare con una serie di potenze di λ che, fissato λ, converge uniformemente rispetto ad x in $(0\,,a)$.

Per il calcolo di $\varphi_0(x)$ e delle $f_{1,n}(x)$ osserveremo che per avere la $\varphi_0(x)$ basterà calcolare la $u_{1,2}(x)|_0$ dalla equazione in $u_{1,i}(x)$ del n. precedente, per $i=2$ e $\lambda=\lambda_0$ [equazione che rientra nel tipo (1)] e tenere poi conto della (7). Avuta la $\varphi_0(x)$, dalla (8), nelle vicinanze del punto $\lambda=0$, si ha

[1] Presentata nella seduta del 6 marzo 1921.

$$u(x) = f(0)\,\varphi_0(x) \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n g^n(0) + \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n f_{1,n}(x)$$

e confrontando questo sviluppo con l'altro: $u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n f_n(x)$, troviamo

$$f_n(x) = f(0)\, g^n(0)\, \varphi_0(x) + f_{1,n}(x) \tag{9}$$

e da questa si ricava la $f_{1,n}(x)$. Le $f_{1,n}(x)$ si annullano tutte per $x = 0$.

La $\varphi_0(x)$ si può anche calcolare in un altro modo. Siccome la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n f_{1,n}(x)$ converge per $\lambda = \lambda_0 = \frac{1}{g(0)}$, si avrà

$$\lim_{n=\infty} \frac{f_{1,n}(x)}{g^n(0)} = 0$$

e perciò dalla (9)

$$\lim_{n=\infty} \frac{f_n(x)}{g^n(0)} = f(0)\,\varphi_0(x),$$

e da questa si trae $\varphi_0(x)$ se $f(0) \neq 0$.

Ciò potrebbe anche esprimersi in modo diverso. Le funzioni $f_1(x), f_2(x), \ldots$ sono le *iterate* di $f(x)$ per mezzo dell'operazione lineare S definita dalla eguaglianza

$$S[\varphi(s)] = g(x)\,\varphi(\alpha x) + \int_0^x N(x,s)\,\varphi(s)\,ds + \int_0^{\alpha x} P(x,s)\,\varphi(s)\,ds,$$

e si vede che il rapporto tra la iterata di ordine n di $f(x)$ e $g^n(0)$ se $f(0) \neq 0$ ha per limite una *funzione fondamentale relativa all'operazione* S, *corrispondente alla costante caratteristica* $\frac{1}{g(0)}$, ossia ha per limite una funzione $\varphi(x)$ soddisfacente all'equazione funzionale

$$\frac{1}{g(0)} S[\varphi(x)] = \varphi(x).$$

Si ha $\varphi(0) = f(0)$.

Se invece $f(0) = 0$ *tale limite è zero.*

5. Finora abbiamo trovato che la soluzione $u(x)$ della (4) derivabile in $(0, a)$ è funzione analitica di λ all'interno del cerchio $|\lambda| \leq \frac{1}{\alpha |g(0)|}$ dotata di un solo punto singolare, e precisamente di un polo nel punto $\lambda = \frac{1}{g(0)}$ col residuo $-\frac{f(0)}{g(0)}\varphi_0(x)$.

La soluzione $u(x)$ trovata ammette derivata seconda — perchè $u'(x)$ è derivabile — e si ha

$$(10)\quad u''(x) = \lambda \Big[\alpha^2 g(x)\, u''(\alpha x) + \int_0^x N_2(x, s)\, u''(s)\, ds + \\ + \int_0^{\alpha x} P_2(x, s)\, u''(s)\, ds + u'(0)\, q_2(x) + u(0)\, q_1'(x) \Big] + f''(x),$$

dove $N_2(x,s)$, $P_2(x,s)$, $q_2(x)$ sono formate per mezzo di $N_1(x,s)$, $P_1(x,s)$, $\alpha g(x)$ come $N_1(x,s)$, $P_1(x,s)$, $q(x)$ lo sono per mezzo di $N(x,s)$, $P(x,s)$, $g(x)$.

In quanto ad $u'(0)$ esso si ricava dalla (5) e si trova

$$u'(0) = \frac{\lambda u(0)\, q_1(0) + f'(0)}{1 - \lambda\alpha\, g(0)},$$

ossia, sostituendo ad $u(0)$ il suo valore già ricavato dalla (4),

$$u'(0) = \frac{\lambda f(0)\, q_1(0) + [1 - \lambda g(0)]\, f'(0)}{[1 - \lambda g(0)]\,[1 - \lambda\alpha g(0)]}.$$

Se denotiamo con $u_{2,i}(x)$ $(i = 1, 2, 3)$ la soluzione dell'equazione

$$(11)\quad u_{2,i}(x) = \lambda \Big[\alpha^2 g(x)\, u_{2,i}(\alpha x) + \int_0^x N_2(x, s)\, u_{2,i}(s)\, ds + \\ + \int_0^{\alpha x} P_2(x, s)\, u_{2,i}(s)\, ds \Big] + l_{2,i}(x),$$

dove poniamo

$$l_{2,1}(x) = f''(x), \quad l_{2,2}(x) = q_1'(x), \quad l_{2,3}(x) = q_2(x),$$

la (10) ci dà

$$u''(x) = u_{2,1}(x) + \lambda\, u(0)\, u_{2,2}(x) + \lambda\, u'(0)\, u_{2,3}(x)$$

e di qui

$$(12)\quad u(x) = \int_0^x (x - \xi)\, u_{2,1}(\xi)\, d\xi + \\ + u(0) \Big[1 + \lambda \int_0^x (x - \xi)\, u_{2,2}(\xi)\, d\xi \Big] + u'(0) \Big[x + \lambda \int_0^x (x - \xi)\, u_{2,3}(\xi)\, d\xi \Big]$$

e questa, per ogni valore di λ interno al cerchio $|\lambda| \leq \dfrac{1}{\alpha^2 |g(0)|}$ e diverso da $\dfrac{1}{g(0)}$ ed $\dfrac{1}{\alpha\, g(0)}$, è l'unica soluzione della (4) che ammetta derivata seconda.

Per $\lambda = \lambda_1 = \dfrac{1}{\alpha\, g(0)}$ la (4) ammette soluzione derivabile finita solo se il numeratore del valore $u'(0)$ tratto dalla (5) risulta nullo, se è cioè

$$\frac{f(0)\, q_1(0)}{(\alpha - 1)\, g(0)} + f'(0) = 0.$$

Si avrà allora una soluzione prendendo

$$u(x) = \int_0^x (x-\xi)\, u_{2,1}(\xi)|_1\, d\xi +$$

$$+ \frac{f(0)}{(\alpha-1)\, g(0)} \int_0^x (x-\xi)\, u_{2,2}(\xi)|_1\, d\xi + \frac{\alpha f(0)}{\alpha - 1},$$

dove con la notazione $|_1$ messa dopo una funzione dipendente da λ, intendiamo che in essa si deve porre $\lambda = \lambda_1$.

La più generale soluzione si avrà dalla particolare ora trovata aggiungendo $c\,\varphi_1(x)$, con c costante arbitraria e

$$\varphi_1(x) = x + \lambda_1 \int_0^x (x-\xi)\, u_{2,3}(\xi)|_1\, d\xi\,;$$

$\varphi_1(x)$ è funzione fondamentale relativa all'operazione S del n. 4, corrispondente alla costante caratteristica λ_1.

Concludiamo così che all'interno del cerchio $|\lambda| \leq \dfrac{1}{\alpha^2 |g(0)|}$ la (4) ammette una ed una sola soluzione dotata di derivata seconda che si può mettere sotto la forma

$$u(x) = \frac{f(0)}{1 - \lambda g(0)}\, \varphi_0(x) + \tag{13}$$

$$+ \left[\frac{f(0)\, q_1(0)}{(\alpha-1)\, g(0)} + f'(0) \right] \frac{1}{1 - \lambda \alpha\, g(0)}\, \varphi_1(x) + \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n f_{2,n}(x),$$

come si deduce facilmente dalla (12).

Da questa si deduce anche che $[1 - \lambda g(0)]\,[1 - \lambda \alpha g(0)]$ all'interno del cerchio suddetto è una serie di potenze di λ che, fissato λ, converge uniformemente rispetto ad x in $(0, a)$. Per avere la $\varphi_1(x)$ bisogna calcolare la $u_{2,3}(x)|_1$ dalla (11) per $i = 3$ e $\lambda = \lambda_1$, e si ha così da risolvere una equazione del tipo (1). Avuta la $\varphi_1(x)$ si trovano le $f_{2,n}(x)$ eguagliando i coefficienti delle stesse potenze di λ nello sviluppo $u(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \lambda^n f_n(x)$ ed in quello che si ottiene dalla (13) sviluppando in serie di potenze di λ nelle vicinanze del punto $\lambda = 0$. Si ha così

$$f_n(x) = g^n(0) \left\{ f(0)\, \varphi_0(x) + \left[\frac{f(0)\, q_1(0)}{(\alpha-1)\, g(0)} + f'(0) \right] \alpha^n\, \varphi_1(x) \right\} + f_{2,n}(x)$$

e da questa si ricava la $f_{2,n}(x)$.

Da quest'ultima eguaglianza ricaviamo anche che il limite per $n = \infty$ del rapporto tra la iterata n^{esima} di una funzione $f(x)$ dotata di derivata seconda e che si annulla per $x = 0$, e la potenza n^{esima} di $\alpha g(0) = \dfrac{1}{\lambda_1}$

è $f'(0)\,\varphi_1(x)$, e quindi se $f'(0) \neq 0$ si ha un altro procedimento di calcolo per ottenere la $\varphi_1(x)$.

Siccome poi è $u(0) = \dfrac{f(0)}{1 - \lambda\, g(0)}$ e $\varphi_1(x)$ si annulla per $x = 0$, tutte le $f_{2,n}(x)$ si annullano per $x = 0$. Anche le derivate prime di queste funzioni si annullano per $x = 0$. Ciò si vede subito derivando la (13) rispetto ad x e facendo poi $x = 0$, tenendo conto che è $\varphi_1'(0) = 1$, $\varphi_0'(0) = \lambda_0\, u_{1,2}(0)|_0$ e ricavando il valore $u_{1,2}(0)|_0$ dalla equazione in $u_{1,2}$ del n. 3; si trova così $\varphi_0'(0) = \dfrac{q_1(0)}{(1-\alpha)\, g(0)}$. Si può calcolare così il valore della derivata del secondo membro della (13) per $x = 0$, l'analogo valore della derivata del primo membro è stato già ricavato dalla (5), eguagliando i due valori troviamo $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \lambda^n f_{2,n}'(0) = 0$, cioè $f_{2,n}'(0) = 0$, come avevamo asserito.

6. Ed ora in generale possiamo dire che la (4) ammette una soluzione ed una sola dotata di derivate di qualunque ordine. Tale soluzione è funzione meromorfa di λ avente come poli semplici i punti $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \ldots$ con $\lambda_n = \dfrac{1}{\alpha^n\, g(0)}$.

Si ha precisamente

$$(14)\quad u(x) = \frac{h_0}{1 - \lambda\, g(0)}\,\varphi_0(x) + \frac{1}{1 - \lambda\, \alpha\, g(0)}\,\varphi_1(x) + \cdots$$
$$\cdots + \frac{h_{n-1}}{1 - \lambda\, \alpha^{n-1}\, g(0)}\,\varphi_{n-1}(x) + \sum_{m=0}^{\infty} \lambda^m f_{n,m}(x),$$

all'interno del cerchio $|\lambda| \leq \dfrac{1}{\alpha^n\, |g(0)|}$.

$\varphi_{n-1}(x)$ ammette derivate di qualunque ordine e si annulla per $x = 0$ insieme con le sue prime $n - 2$ derivate, la derivata $(n-1)^{\mathrm{ma}}$ per $x = 0$ prende il valore $(n-1)!$, $\varphi_{n-1}(x)$ è funzione fondamentale relativa all'operazione S del n. 4 corrispondente alla costante caratteristica λ_{n-1}. $\varphi_{n-1}(x)$ si può ottenere risolvendo un'equazione del tipo (1), oppure in un altro modo che discende immediatamente da quanto ora diciamo.

Sia $f(x)$ una funzione dotata di derivate fino all'ordine n e sia

$$f(0) = 0,\; f'(0) = 0,\; \ldots\; f^{(n-2)}(0) = 0$$

e denotiamo con $f_1(x), f_2(x), \ldots$ le iterate di $f(x)$ per mezzo dell'operazione S del n. 4. Si ha allora

$$f^{(n-1)}(0)\,\varphi_{n-1}(x) = (n-1)!\,\lim_{m=\infty} \frac{f_m(x)}{[\alpha^{n-1}\, g(0)]^m}.$$

Le funzioni $f_{n,m}(x)$ $(m = 1, 2, 3, ...)$ ammettono derivate di qualunque ordine e si annullano per $x = 0$ insieme alle loro prime $n - 1$ derivate.

In seguito diremo come si calcolano le costanti $h_0, h_1, \dots h_{n-1}$; conosciute queste costanti e le funzioni $\varphi_0(x), \varphi_1(x), \dots \varphi_{n-1}(x)$ si possono calcolare le $f_{n,m}(x)$, perchè si ha

$$g^m(0)\left[h_0\,\varphi_0(x) + h_1\,\alpha^m\,\varphi_1(x) + h_2\,\alpha^{2m}\,\varphi_2(x) + \cdots \right.$$
$$\left. \cdots + h_{n-1}\,\alpha^{(n-1)m}\,\varphi_{n-1}(x)\right] + f_{n,m}(x) = f_m(x).$$

Matematica. — *Realizzazione cinematica del parallelismo superficiale.* Nota di E. PERSICO, presentata dal Socio T. LEVI-CIVITA (¹).

Consideriamo una superficie rigida S, convessa almeno in una certa regione, e avente del resto tale configurazione da potere materialmente rotolare sopra un piano ω, finchè il contatto si mantiene nella regione suddetta.

Con l'intesa di rispettare questa limitazione, immaginiamo di far rotolare S su ω, senza strisciamento, nè giro (*pivotement* dei francesi), in modo che il punto di contatto Q percorra una assegnata curva T di S. Queste condizioni possono sempre venire soddisfatte, e determinano in modo unico il movimento. Difatti, se esse sono soddisfatte, il moto è in ogni istante una rotazione intorno a un asse passante per Q e giacente in ω, quindi tangente a S, e la superficie rigata Σ, luogo, nel sistema mobile, di questi assi istantanei di rotazione, contiene la curva T ed ha tutte le generatrici tangenti ad S nei punti di questa curva: essa è dunque la sviluppabile circoscritta ad S lungo T, e il moto si può individuare mediante il rotolamento di questa sviluppabile sul piano ω; viceversa, il moto definito dal rotolamento della sviluppabile circoscritta ad S lungo T su ω soddisfa le condizioni suaccennate. Nel movimento ora descritto, l'asse istantaneo di rotazione (caratteristica della sviluppabile circoscritta) e la tangente alla curva T sono sempre, come è noto, due tangenti coniugate della superficie S, il che mostra ancora che, data la curva T, è in generale definito, in ciascun punto di essa, l'asse istantaneo di rotazione. Sono eccettuati quei punti parabolici, nei quali eventualmente la T avesse la direzione asintotica, poichè in tali condizioni la direzione coniugata di questa rispetto alla indicatrice è indeterminata: in questi punti la rotazione istantanea è nulla, perchè due punti infinitamente vicini di T hanno il medesimo piano tangente. Se tutti i punti di un tratto AB di T sono di questa specie (se cioè il tratto AB coincide con un tratto piano di asintotica) la superficie tocca un piano lungo questo tratto, e il punto di contatto di S con ω non è più determinato: si

(¹) Presentata nella seduta del 2 maggio 1921.