ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA NAZIONALE

DEI LINCEI

ANNO CCCXVIII.

1921

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXX.

2° Semestre.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1921

Matematica. — *Sopra i sistemi complementari dei sistemi non chiusi di funzioni ortogonali.* Nota II di CARLO SEVERINI, presentata dal Corrispondente O. TEDONE [1].

4. Si aggreghi [2] al sistema (1) la funzione $\psi_{i_0}(x)$. Se dopo ciò esistono ancora funzioni ortogonali alla $\psi_{i_0}(x)$ ed alle (1), il numero delle (9) dovrà essere >1, e per qualche $\nu > 0$ saranno la $\psi_{i_0}(x)$ e la $\psi_{i_\nu}(x)$ quasi dappertutto in (a, b) linearmente indipendenti. Detta infatti nell'ipotesi contraria $\theta_1(x)$ una soluzione effettiva delle equazioni integrali

$$(11)\qquad \int_a^b \theta(x)\,\psi_{i_0}(x)\,dx = 0\ ,\quad \int_a^b \theta(x)\,\mathrm{V}_k(x)\,dx = 0\quad (k = 0, 1, 2, \ldots),$$

poichè

$$\left\{\int_a^b \theta_1(x)\left[\Phi_{i_0}(x) - \sum_0^n{}_k\,\mathrm{A}_k^{(i_0)}\,\mathrm{V}_k(x)\right]dx\right\}^2 \leqq$$

$$\leqq \int_a^b [\theta_1(x)]^2\,dx \cdot \int_a^b \left[\Phi_{i_0}(x) - \sum_0^n{}_k\,\mathrm{A}_k^{(i_0)}\,\mathrm{V}_k(x)\right]^2 dx\,,$$

e quindi

$$\lim_{n=\infty}\int_a^b \theta_1(x)\left[\Phi_{i_0}(x) - \sum_0^n{}_k\,\mathrm{A}_k^{(i_0)}\,\mathrm{V}_k(x)\right]dx = 0\,,$$

risulta

$$\int_a^b \Phi_{i_0}(x)\,\theta_1(x)\,dx = 0\,,$$

donde segue, per la prima delle (11),

$$(12)\qquad \int_a^b \theta_1(x)\,\varphi_{i_0}(x)\,dx = 0\,.$$

Allo stesso modo si trova

$$(13)\qquad \int_a^b \theta_1(x)\,\omega_i(x)\,dx = 0 \qquad (i \neq i_0),$$

se la

$$(14)\qquad \omega_i(x) = c_0\,\varphi_{i_0}(x) + c_i\,\varphi_i(x)\,,$$

(1) Presentata nella seduta del 6 marzo 1921.

(2) Cfr. Nota I, in questi Rendiconti, fasc. 3-4, sem. 2°, pag. 92.

ove c_0 e c_i indicano due costanti non entrambe nulle, soddisfa all'equazione (2). Poichè una combinazione lineare, come la (14), soddisfacente alla (2), si può sempre formare nel caso che di questa proprietà goda la $\varphi_i(x)$, assumendo $c_0 = 0$, $c_i \neq 0$, risulta (§ 3) dalla (12) e dalla (13)

$$\int_a^b \theta_1(x)\, \varphi_i(x)\, dx = 0 \qquad (i = 0\,,1\,,2\,,3\,,\ldots),$$

contro l'ipotesi che non esistano soluzioni effettive per le (4).

Detto ora j_1 il più piccolo valore di i_ν, pel quale le $\psi_{i_0}(x)$, $\psi_{i_\nu}(x)$ sono quasi dappertutto in $(a\,,b)$ linearmente indipendenti, ammesso che esistano funzioni ortogonali a $\psi_{i_0}(x)$, $\psi_{j_1}(x)$ ed alle (1), si vede in modo analogo che le (9) debbono essere in numero > 2, e che per qualche $i_\nu > j_1$ le $\psi_{i_0}(x)$, $\psi_{j_1}(x)$, $\psi_{i_\nu}(x)$ sono quasi dappertutto linearmente indipendenti in $(a\,,b)$.

Così continuando si viene a determinare un sistema finito o numerabile di funzioni

$$\psi_{j_\nu}(x) \qquad \begin{pmatrix} \nu = 0\,,1\,,2\,,\ldots \\ j_0 = i_0 \end{pmatrix}, \tag{15}$$

che normalizzato dà luogo ad un sistema complementare del sistema (1).

Se infatti potesse esistere una soluzione effettiva $\overline{\theta}(x)$ delle equazioni integrali

$$\int_a^b \theta(x)\, \psi_{i_\nu}(x)\, dx = 0 \quad , \quad \int_a^b \theta(x)\, \mathrm{V}_k(x)\, dx = 0 \qquad (\nu\,, k = 0\,,1\,,2\,,\ldots),$$

si avrebbe

$$\int_a^b \overline{\theta}(x)\, \varphi_{j_\nu}(x)\, dx = 0 \qquad (\nu = 0\,,1\,,2\,,\ldots). \tag{16}$$

Inoltre per ogni $i \neq j_\nu$ $(\nu = 0\,,1\,,2\,,\ldots)$, essendo

$$\overline{\omega}_i(x) = \sum_0^{p_i}{}_\nu\, \overline{c}_{j_\nu}\, \varphi_{j_\nu}(x) + \overline{c}_i\, \varphi_i(x) \qquad (\overline{c}_i \neq 0)$$

una combinazione lineare a coefficienti costanti di $\varphi_i(x)$ e di alcune delle $\varphi_{j_\nu}(x)$ in numero finito p_i, soddisfacente alla (2), combinazione lineare, la cui esistenza è provata dalle considerazioni sopra svolte, risulterebbe ancora

$$\int_a^b \overline{\theta}(x)\, \overline{\omega}_i(x)\, dx = 0 \qquad (i \neq j_\nu\,, \nu = 0\,,1\,,2\,,\ldots). \tag{17}$$

Dalla (16) e dalla (17) si dedurrebbe infine

$$\int_a^b \overline{\theta}(x)\, \varphi_i(x)\, dx = 0 \qquad (i = 0\,,1\,,2\,,\ldots),$$

ciò che è impossibile.

5. Per la costruzione di un sistema complementare del sistema (1) interessa, come ben si vede, tener conto soltanto delle funzioni (3), che non soddisfano alla (2), e di cui nessuna combinazione lineare a coefficienti costanti, non tutti nulli, può ancora soddisfare alla (2). Escludendo via via dal sistema (3) le funzioni, che non godono di queste proprietà, se ne deduce il sistema

$$\varphi_{j_\nu}(x) \qquad (\nu = 0\,, 1\,, 2\,, \ldots)\,, \tag{18}$$

composto di tutte e sole le funzioni (3) utili alla costruzione del detto sistema complementare.

Diremo che le (18) costituiscono un *sistema fondamentale* per la chiusura del sistema (1).

Dal concetto di *sistema fondamentale* per la chiusura di un sistema non chiuso di funzioni ortogonali e normali scaturisce senz'altro un importante teorema, dovuto al prof. Cipolla ([3]), contenente una condizione necessaria e sufficiente, affinchè questo ammetta un sistema complementare finito, composto di un determinato numero di funzioni.

6. Resta ora ad assegnare la legge, colla quale via via si determinano le funzioni del *sistema fondamentale* (18), di cui la prima $\varphi_{j_0}(x)$ coincide, come si è detto, colla prima delle funzioni (3), che non soddisfano alla (2).

Ammesso in generale di aver determinato le prime n funzioni (18), se si pone

$$a_{i,j} = \int_a^b \varphi_i(x)\,\varphi_j(x)\,dx - \sum_0^\infty{}_k\, A_k^{(i)} A_k^{(j)} \qquad (i\,, j = 0\,, 1\,, 2\,, \ldots)\,,$$

sarà j_n il più piccolo valore dell'indice $i_\nu > j_{n-1}$, pel quale risulta

$$\begin{vmatrix} a_{j_1,j_1} & a_{j_1,j_2} & \cdots & a_{j_1,j_{n-1}} & a_{j_1,i_\nu} \\ a_{j_2,j_1} & a_{j_2,j_2} & \cdots & a_{j_2,j_{n-1}} & a_{j_2,i_\nu} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{j_{n-1},j_1} & a_{j_{n-1},j_2} & \cdots & a_{j_{n-1},j_{n-1}} & a_{j_{n-1},i_\nu} \\ a_{i_\nu,j_1} & a_{i_\nu,j_2} & \cdots & a_{i_\nu,j_{n-1}} & a_{i_\nu,i_\nu} \end{vmatrix} > 0\,. \tag{19}$$

([3]) Cfr. Cipolla, *Sui sistemi di funzioni ortogonali, che ammettono un sistema complementare finito* [Rend. della R. Accad. delle scienze fisiche e matematiche di Napoli (1915), § 8].

La (19) esprime infatti la condizione necessaria e sufficiente, affinchè la forma quadratica delle n variabili $x_1, x_2, \dots, x_n$

$$\sum_1^{n-1}{}_\mu \sum_1^{n-1}{}_\rho a_{j_\mu, j_\rho} x_\mu x_\rho + 2x_n \sum_1^{n-1}{}_\mu a_{j_\mu, i_\nu} x_\mu + a_{i_\nu, i_\nu} x_n^2$$

sia definita positiva, come si vede osservando che definita positiva è per ipotesi la forma quadratica delle $n-1$ variabili $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$:

$$\sum_1^{n-1}{}_\mu \sum_1^{n-1}{}_\rho a_{j_\mu, j_\rho} x_\mu x_\rho ,$$

e che pertanto deve aversi

$$\begin{vmatrix} a_{j_1,j_1} & a_{j_1,j_2} \cdots\cdots & a_{j_1,j_\rho} \\ a_{j_2,j_1} & a_{j_2,j_2} \cdots\cdots & a_{j_2,j_\rho} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{j_\rho,j_1} & a_{j_\rho,j_2} \cdots\cdots & a_{j_\rho,j_\rho} \end{vmatrix} > 0 \quad (\varrho = 1, 2, \dots, n-1).$$

La determinazione degli indici i_ν ed il calcolo dei coefficienti $a_{i,j}$, possono riuscire più semplici, se in particolare, come sistema (3), si assume un sistema chiuso di funzioni ortogonali e normali.

Fisica. — *Potere emissivo di alcuni metalli ed ossidi* [1]. Nota della dott. Marya Kahanowicz, presentata dal Corrispondente M. Cantone [2].

Mentre per il corpo nero le leggi che governano l'emissione dell'energia raggiante hanno oramai assunto il carattere di leggi teoriche, per i corpi non neri si attraversa ancora la fase puramente empirica, poichè la teoria elettromagnetica ci fornisce qualche indizio circa l'emissione dei corpi speculari e non ci indica nessun elemento per i corpi non conduttori. Il problema si presenta difficile anche dal punto di vista sperimentale per le difficoltà che si incontrano nella determinazione della temperatura e nel confronto col corpo nero.

Coi varî metodi finora seguìti, la determinazione della temperatura non è rigorosa, o per le differenze che si stabiliscono fra l'interno dell'involucro e la superficie emittente [3], o per le incertezze che presenta in generale la pirometria ottica. Il dispositivo da me realizzato presenta il vantaggio di assicurare molto bene la temperatura, poichè la lamina viene riscaldata

[1] Presentata nella seduta del 20 marzo 1921.

[2] Lavoro eseguito nell'Istituto di Fisica sperimentale della R. Università di Napoli.

[3] Vanno ricordate in proposito la scatola di Lummer e la spirale di Pirani.