ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA NAZIONALE

DEI LINCEI

ANNO CCCXVIII.

1921

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXX.

2° Semestre.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1921

MEMORIE E NOTE PRESENTATE DA SOCI

Matematica. — *Caratterizzazione intrinseca di elementi lineari rispetto al parallelismo.* Nota di ENRICO BOMPIANI, presentata dal Socio T. LEVI-CIVITA [1].

1. Il parallelismo, entro una V_n, fra direzioni [2] dipende generalmente dal cammino lungo il quale si esegue il trasporto: l'indipendenza da questo è proprietà esclusiva degli spazî euclidei; se la V_n contiene una congruenza di curve (∞^{n-1}) a parallelismo completo (cioè indip. dal cammino) quelle sono geodetiche ortogonali ad $\infty^1\, V_{n-1}$ totalmente geodetiche e l'elemento lineare di V_n è perciò del tipo (di Levi Civita):

$$ds^2 = d\sigma^2 + dx_n^2 \quad , \quad \left[d\sigma^2 = \sum_{1\,ik}^{n-1} a_{ik}(x_1, \dots, x_{n-1})\, dx_i\, dx_k\right].$$

Accanto a questi due risultati, che caratterizzano tipi di elementi linearî partendo dal parallelismo, se ne possono porre altri derivanti dall'imporre alla V_n determinati comportamenti rispetto ad esso.

2. Le nozioni seguenti potranno servire allo scopo:

α) Si dirà AUTOSTABILE una V_{n-1} (o V_k) di V_n tale che una direzione di V_{n-1} trasportata per parallelismo (risp. a V_n) lungo cammini di V_{n-1} si porti sempre in una direzione di V_{n-1} (con ciò *non* si esige che il risultato sia indipendente dal cammino).

β) Un sistema di $\infty^1\, V_{n-1}$ in V_n si dirà STABILE se una direzione di una V_{n-1}, trasportata lungo cammini qualsiansi in V_n, dà sempre luogo ad una direzione di una V_{n-1} (quindi le V_{n-1} sono necessariamente autostabili; ma *non* viceversa: $\infty^1\, V_{n-1}$ autostabili non formano generalmente un sistema di stabilità).

γ) Se in V_n esiste una congruenza (∞^{n-1}) di curve parallele per qualsiasi cammino eseguito sopra $\infty^1\, V_{n-1}$, queste si diranno V_{n-1} D'INDIFFERENZA per la congruenza.

È chiaro come si possano dare altri criterî, simili ai precedenti, per la caratterizzazione invariantiva di elementi lineari rispetto al parallelismo: ecco alcuni risultati.

3. SISTEMA ∞^1 DI V_{n-1} AUTOSTABILI.

[1] Presentata nella seduta del 17 aprile 1921.

[2] Per la definizione, e le proprietà che seguono, del parallelismo vedasi la Memoria di T. Levi-Civita: *Nozione di parallelismo in una varietà qualunque* ecc. (Rend. Circ. Matem. di Palermo, t. XLII, 1917$_1$).

Si trova che il ds^2 è del tipo di Hadamard

$$ds^2 = \sum_{1\,ik}^{n-1} a_{ik}(x_1, \dots, x_{n-1})\, dx_i\, dx_k + a_{nn}(x_1, \dots, x_n)\, dx_n^2$$

quindi;

Se una V_n *possiede* $\infty^1\, V_{n-1}$ *auto-stabili queste sono totalmente geodetiche e le loro traiettorie ortogonali pongono fra esse una corrispondenza per applicabilità; il parallelismo entro una* V_{n-1} *è quello subordinato in essa dal parallelismo ambiente.*

Quindi *se il risultato del trasporto per parallelismo* (*rispetto a* V_n) *di una direzione di* V_{n-1} *entro* V_{n-1} *non dipende dal cammino seguito le* V_{n-1} *sono euclidee, e*

$$ds^2 = \sum_{1\,i}^{n-1} dx_i^2 + a_{nn}(x_1, \dots, x_n)\, dx_n^2 .$$

4. Sistema stabile di $\infty^1\, V_{n-1}$.

Si trova che il ds^2 è del tipo di Levi-Civita:

$$ds^2 = \sum_{1\,ik}^{n-1} a_{ik}(x_1, \dots, x_{n-1})\, dx_i\, dx_k + dx_n^2;$$

se una V_n *contiene un sistema stabile di* $\infty^1\, V_{n-1}$ *queste sono totalmente geodetiche e le traiettorie ortogonali sono geodetiche.*

È questa un'altra proprietà caratteristica del ds^2 di Levi-Civita (oltre quella di contenere una congruenza a parallelismo completo).

Dalle proprietà del parallelismo si ricava poi che *se una* V_n *contiene* k *congruenze* (*linearmente indipendenti*) *a parallelismo completo si ha*

$$ds^2 = d\sigma_{n-k}^2 + dx_{n-k+1}^2 + \dots + dx_n^2$$

ove $d\sigma_{n-k}$ è un elemento lineare nelle sole variabili $x_1, \dots, x_{n-k}$; una tale V_n si può sempre costruire in uno spazio euclideo di dimensione

$$\leq \frac{(n-k)(n-k+1)}{2} + k ,$$

cioè è di classe $\leq (n-k)(n-k-1)/2$; quindi è euclidea per $k = n-1$:

Condizione necessaria e sufficiente affinchè una V_n *sia euclidea è che contenga* $n-1$ *congruenze di curve a parallelismo còmpleto* (*o* $n-1$ *sistemi di stabilità*) (¹).

(¹) Siccome l'indipendenza del parallelismo dal cammino si esprime annullando i simboli di Riemann, $(ik, lm) = 0$, questo risultato dà una nuova via geometrica d'integrazione di queste equazioni.

5. Congruenza [normale] di curve in V_n con V_{n-1} ortogonali d'indifferenza.

Si trova ancora l'elemento lineare di Hadamard (n. 3), quindi una nuova proprietà caratteristica di esso.

6. Proprietà caratteristica delle congruenze di curve che ammettono varietà d'indifferenza.

Occorre richiamare la definizione di *asse* di una faccetta a due dimensioni in V_n (¹): è tale una direzione (che in generale esiste ed è unica per n dispari, e non esiste per n pari) che trasportata per parallelismo lungo un circuito infinitesimo chiuso eseguito sulla faccetta ritorna al punto di partenza su sè stessa. Allora si dimostra che affinchè ∞^1 V_{n-1} si possano considerare come V_{n-1} d'indifferenza per una congruenza di curve occorre e basta che

1°) ogni faccetta a due dimensioni di V_{n-1} abbia un asse (in V_n);

2°) gli assi di tutte queste faccette per un punto coincidano;

3°) gli assi relativi a punti infinitamente vicini di una V_{n-1} siano paralleli. Se ciò accade la congruenza è quella inviluppata dagli assi delle V_{n-1}.

In particolare per $n=3$ le due prime condizioni sono sempre soddisfatte; posto $ds^2 = a_{11}\,dx_1^2 + 2a_{12}\,dx_1\,dx_2 + a_{22}\,dx_2^2 + a_{33}\,dx_3^2$, i parametri relativi agli assi delle faccette $dx_3 = 0$ sono

$$\chi^{(i)} = \alpha^{(i3)}/R \quad \text{con} \quad R = \sqrt{\Sigma a_{ik}\,\alpha^{(i3)}\,\alpha^{(k3)}}$$

(le $\alpha^{(rs)}$ sono i simboli di Ricci); quindi, tenendo conto della condizione ultima si ha:

Dato un sistema ∞^1 di superficie in V_3, per sapere se esse possano considerarsi come superficie d'indifferenza per una congruenza di curve, non c'è che da verificare se le espressioni $\chi^{(i)} = \alpha^{(i3)}/R$ soddisfano alle equazioni

$$\frac{\partial \chi^{(i)}}{\partial x_1} = -\sum \left\{ {1l \atop i} \right\} \chi^{(l)} \quad ; \quad \frac{\partial \chi^{(i)}}{\partial x_2} = -\sum \left\{ {2l \atop i} \right\} \chi^{(l)}$$

(i simboli $\left\{ {hl \atop i} \right\}$ essendo calcolati per l'ultimo ds^2 scritto); se ciò accade, la congruenza è quella degli assi (definita dai parametri $\chi^{(i)}$).

7. Congruenza di curve con superficie d'indifferenza equidistanti secondo quelle curve.

Se le curve della congruenza sono linee di equidistanza (obliqua, chè altrimenti si ritorna sul ds^2 di Levi-Civita) per le superficie d'indifferenza si ha che: *la corrispondenza stabilita fra queste dalle linee della con-*

(¹) Vedasi la mia Memoria: *Studi sugli spazi curvi: del parallelismo in una varietà qualunque*, parte II (Atti R. Istit. Veneto, 1921 attualmente in corso di stampa).

gruenza è un'applicabilità e il ds^2 *è riducibile al tipo*

$$ds^2 = d\sigma^2 + 2a_{13}\,dx_1\,dx_3 + 2a_{23}\,dx_2\,dx_3 + dx_3^2$$

con

$$\frac{\partial a_{13}}{\partial x_2} = \frac{\partial a_{23}}{\partial x_1}$$

($d\sigma$ è un elemento lineare binario).

Di più: *se nella corrispondenza nominata si corrispondono le curve contenute nella* V_2 *e normali a quelle della congruenza, questa è normale e al* ds^2 *si può dare la forma*

$$ds^2 = [b_{11}(u_1, u_2) - \Phi^2(u_3 - u_1)]\,du_1^2 + b_{22}(u_1, u_2)\,du_2^2 + \Phi^2(u_3 - u_1)\,du_3^2;$$

le curve della congruenza sono le $u_3\,(du_1 = du_2 = 0)$ e le superficie d'indifferenza sono rappresentate da $u_3 - u_1 = \text{cost.}$ (se $\Phi = \text{cost.}$ si ritorna sul ds^2 di Levi-Civita): *le superficie* $u_1 = \text{cost.}$ *contenenti le curve della congruenza sono a curvatura nulla e le linee nominate sono geodetiche per esse.* Inoltre: *la* V_3 *contiene altre* ∞^1 *superficie applicabili fra loro e su quelle d'indifferenza* (le $u_3 + u_1 = \text{cost.}$).

8. Congruenza di curve appartenenti ad ∞^1 superficie d'indifferenza per esse.

Se le superficie d'indifferenza contengono le curve della congruenza queste sono geodetiche e quelle a curvatura nulla; al ds^2 può darsi la forma

$$ds^2 = a_{11}(x_1, x_2, x_3)\,dx_1^2 - 2x_3\,\frac{\partial\chi(x_1, x_2)}{\partial x_2}\,dx_1\,dx_3 + a_{22}(x_1, x_2)\,dx_2^2 + $$
$$+ 2\chi(x_1, x_2)\,dx_1\,dx_3 + dx_3^2$$

e in particolare, se la congruenza è ortogonale

$$ds^2 = a_{11}(x_1, x_2, x_3)\,dx_1^2 + a_{22}(x_1, x_2)\,dx_2^2 + dx_3^2$$

($dx_1 = dx_2 = 0$, linee della congruenza; $dx_1 = 0$ superficie d'indifferenza). Le traiettorie ortogonali (x_1) alle superficie d'indifferenza (fra loro applicabili) *non* determinano un'isometria, ma un'affinità fra gl'intorni di punti corrispondenti (in cui sono direzioni di uguaglianza quelle della congruenza); se si assumono nuove linee x_1 che determinino l'applicabilità si hanno i tipi

$$ds^2 = a_{11}(x_1, x_2, x_3)\,dx_1^2 + 2\left\{\psi(x_1, x_2) - x_3\,\frac{\partial\chi}{\partial x_2}\right\}dx_1\,dx_2 +$$
$$+ 2\chi(x_1, x_2)\,dx_1\,dx_3 + dx_2^2 + dx_3^2$$

$$ds^2 = a_{11}(x_1, x_2, x_3)\,dx_1^2 + 2\,\psi(x_1, x_2)\,dx_1\,dx_2 + dx_2^2 + dx_3^2.$$