ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

ANNO CCCXVIII.

1921

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXX.

2° Semestre.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1921

Matematica. — *Le superficie ellittiche il cui determinante è un numero composto.* Nota I del dott. OSCAR CHISINI, presentata dal Corrispondente F. ENRIQUES [1].

INTRODUZIONE. — Nella Memoria *Sulle superficie algebriche di genere geometrico zero* [2] Enriques ha dimostrato che le superficie di genere geometrico $p_g = 0$ e di genere mumerico $p_a = -1$ appartengono alla famiglia generale delle superficie ellittiche, la quale riesce definita dal possesso di due fasci di curve intersecantisi in un certo numero n di punti: un fascio lineare di curve ellittiche K, tutte di egual modulo, e un fascio ellittico di curve C di genere $\pi\ (\geq 0)$, del pari fra loro birazionalmente identiche. I gruppi di n punti intersezioni delle C e K formano un'involuzione I_n generata da un gruppo abeliano di trasformazioni della superficie in se stessa.

Una superficie F del tipo indicato si lascia rappresentare sopra un cilindro ellittico multiplo d'ordine n: $\varphi(xy) = 0$, con una curva di diramazione composta di sezioni piane $z = \text{cost}$; il numero n (per il significato che assume in rapporto alla teoria delle trasformazioni delle funzioni ellittiche) riceve il nome di *determinante* della nostra superficie ellittica F.

Nella citata Memoria di Enriques, partendo dal cilindro multiplo, vengono effettivamente costruite (in due maniere: mercè le funzioni ellittiche e con procedimento algebrico) le F, per cui il determinante è un numero primo, ciò che richiede l'estrazione di un radicale portante sopra una funzione razionale dei punti di φ moltiplicata per un polimonio in z. Quanto alle superficie ellittiche il cui determinante è un numero composto, l'A si è limitato a recare l'esempio del caso ciclico in cui interviene ancora un solo radicale (o due radicali sovrapposti). Ma Bagnera e De Franchis nei loro studi sulle superficie iperellittiche hanno incontrato altri esempi di (particolari) superficie ellittiche (in cui il determinante è un numero composto) non appartenenti al tipo ciclico e per le quali intervengono due radicali non sovrapposti.

Da queste ricerche viene posto il problema generale di: « Costruire per n qualunque (non primo) le superficie rappresentate sul cilindro ellittico $\varphi(xy) = 0$ contato n volte con una curva di diramazione composta di sezioni piane $z = \text{cost.}$ » e così di *classificare le superficie ellittiche il cui deter-*

(1) Presentata nella seduta del 3 aprile 1921.
(2) Rendiconti del Circolo matematico di Palermo, t. XX (1905).

minante n è un numero composto. Tale scopo appunto è quello del presente lavoro.

1. La costruzione dei cilindri multipli anzidetti si riconduce a quella delle curve multiple sezioni $z =$ cost., nonchè alla costruzione delle rette multiple generatrici del cilindro. Per ciò che concerne le dette curve $z =$ cost. il problema è di « costruire le curve ellittiche multiple d'ordine n rappresentate sopra una φ ellittica senza punti di diramazione ».

E da questo problema, che ha di per se stesso notevole interesse, conviene qui prendere le mosse.

Sia dunque K una curva ellittica irriducibile rappresentata sulla φ ellittica contata n volte: siano $P_1\, P_2 \dots P_n$ gli n punti di K corrispondenti a un punto P di φ. Si consideri la riemanniana della curva φ realizzata da un toro T, generato dalla rotazione di un cerchio intorno a un asse verticale v (complanare con esso); su T avremo due serie di cerchi: cerchi verticali che indicheremo con A e cerchi orizzontati che indicheremo con B, i quali costituiscono le due serie di cicli fondamentali del toro. Quando il punto P descrive un cerchio A, i punti $P_1\, P_2 \dots P_n$ si permuteranno secondo una certa sostituzione α, e similmente secondo una sostituzione β, quando P descrive B: mancando su φ punti di diramazione, α e β non variano quando A e B si muovono entro le rispettive serie, ed essendo K irriducibile, le due sostituzioni α e β generano un gruppo G transitivo. E si riconosce che G è abeliano: infatti trasformare A con B equivale a far ruotare A intorno all'asse v fino a tornare in sè, e riuscendo così A uguale al suo trasformato mediante B, sarà similmente $\alpha = \beta\alpha\beta^{-1}$; essendo dunque permutabili le due operazioni generatrici di G, lo saranno anche tutte le altre che appartengono al G stesso. Il gruppo abeliano G può essere ciclico, venendo allora generato da una sostituzione π di periodo n, di cui α e β sono delle potenze; ma importa in ogni caso *costruire la base di* G.

A tale scopo si designino con a e b i periodi di α e β, e si decompongano in fattori primi scrivendo:

$$a = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \dots p_i^{a_i}\ , \quad b = p_1^{b_1} p_2^{b_2} \dots p_i^{b_i}$$

dove qualcuno degli esponenti può essere uguale a zero. Potremo distinguere i nostri fattori primi p in due categorie di numeri p_h e p_k, designando con p_h un fattore per cui sia $a_h < b_h$ e con p_k un fattore per cui sia invece $a_k \geq b_k$. Fatta questa distinzione porremo m uguale al prodotto dei fattori della prima categoria elevati agli esponenti a_h:

$$m = \Pi p_h^{a_h}\,,$$

e similmente

$$n = \Pi p_k^{b_k} .$$

Poniamo inoltre

$$r = \frac{a}{m} , \ s = \frac{b}{n} ;$$

è chiaro che le quattro coppie di numeri m e n, m e r, n e s, r e s, sono coppie di numeri primi fra loro e che il prodotto rs è il minimo comune multiplo di a e b.

Ora consideriamo l'operazione

$$\pi_1 = \alpha^m \beta^n :$$

il periodo di π_1 sarà $\nu_1 = rs$, essendo i periodi r ed s di α^m e β^n primi fra loro.

Questo periodo ν_1 sarà il massimo possibile che appartenga ad un'operazione di G, ed anzi ogni altro periodo sarà divisore di ν_1, come è chiaro osservando che G è generato dalle operazioni permutabili α e β, e che ν_1 è il minimo comune multiplo dei loro periodi a e b.

Dopo ciò, definita l'operazione

$$\pi = \alpha^r \beta^s ,$$

dimostriamo che π_1 e π generano tutto G. A tale scopo si osserverà che entro il gruppo ciclico G_1, generato da π_1, sono contenute le α^m e β^n (e così in quello generato da π sono contenute α^r e β^s), come segue dall'essere primi fra loro i periodi r ed s di α^m e β^n.

Ora poichè m ed r sono primi fra loro ed $mr = a$, α^m ed α^r generano per moltiplicazione l'intero gruppo delle a potenze di α, e così pure β^n e β^s generano l'intero gruppo delle b potenze di β; per conseguenza π_1 e π dànno l'intero gruppo G generato da α e β.

Ora si consideri il *periodo* ν_2 di π *relativo* al gruppo ciclico G_1 (sarà $\nu_2 = 1$ solo nel caso che G sia ciclico, coincidendo allora con G_1): avremo

$$\pi^{\nu_2} = \pi_1^{\mu} ;$$

essendo mn il periodo di π, sarà

$$\frac{mn}{\nu_2} = \frac{\nu_1}{\mu} , \text{ cioè } \mu = \frac{\nu_1}{mn} \nu_2 ,$$

sicchè, essendo ν_1 multiplo di mn, μ appare multiplo di ν_2. Allora l'operazione

$$\pi_2 = \pi \pi_1^{-\frac{\mu}{\nu_2}}$$

ha il periodo assoluto ν_2 uguale al periodo relativo rispetto a G_1, ed essa, insieme a π_1, genera l'intero G, sicchè $n = \nu_1 \nu_2$. Siamo dunque riusciti a costruire le due sostituzioni indipendenti π_1 e π_2 che formano la base del gruppo abeliano G; e π_2 sarà un'effettiva sostituzione qualora G non sia ciclico coincidendo con G_1.

2. Esaminata la struttura del gruppo G, veniamo alla *costruzione effettiva delle curve n — ple* K. Distingueremo due casi, secondochè G è ciclico o no.

a) Caso ciclico. — Sia X $(x\,y)$ la funzione algebrica del punto P di φ che vale a separare gli n punti $P_1 P_2 \dots P_n$, ad esso corrispondenti, che appartengono a K: data la ciclicità del gruppo G, secondo cui si permutano $P_1 P_2 \dots P_n$ quando P si muove comunque sulla riemanniana di φ, sarà X funzione razionale delle coordinate x, y del punto P e di un radicale n-esimo portante sopra di esse (¹); e — per una conveniente trasformazione birazionale — potremo addirittura scrivere per K le equazioni

$$1)\qquad X = \sqrt[n]{\psi(xy)}\;,\quad \varphi(xy) = 0\,.$$

Non essendovi su φ punti di diramazione, la curva $\psi(xy) = 0$ avrà — ovunque incontri la φ — un contatto n-punto. Ed è chiaro che — ove ψ soddisfi a detta condizione — ogni curva K del tipo 1) corrisponde a una φ multipla ciclica, priva di punti di diramazione e quindi di genere $p = 1$.

b) Caso non ciclico. — Il gruppo G abeliano d'ordine $n = \nu_1\nu_2$ sia generato dalle due sostituzioni base π_1 e π_2 di periodi ν_1 e ν_2 (ν_1 multiplo di ν_2). Allora la funzione X che vale a staccare gli n punti $P_1 P_2 \dots P_n$ sarà esprimibile razionalmente per le coordinate x, y del punto P e di due radicali d'ordine ν_1 e ν_2 portanti separatamente sopra di esse (²); e — per una conveniente trasformazione birazionale — potremo addirittura scrivere per K le equazioni:

$$2)\qquad X = \sqrt[\nu_1]{\psi_1(xy)} + \sqrt[\nu_2]{\psi_2(xy)}\;,\quad \varphi(xy)\,0\,,$$

dove la curva $\psi_1(xy) = 0$ ha un contatto ν_1 — punto ovunque incontri φ, e la $\psi_2(xy) = 0$ ha similmente contatti ν_1 — punti. Ed è chiaro che ove ψ_1 e ψ_2 soddisfino alle dette condizioni, ogni funzione X del tipo 2) corrisponde a una curva ellittica multipla rappresentata sulla φ contata $n = \nu_1\nu_2$ volte col gruppo di monodromia G.

Vedremo poi per i due casi quando si abbiano curve K irriducibili e come si caratterizzino le K birazionalmente distinte.

(¹) Cfr. p. es. Bianchi, *Lezioni sulla teoria dei gruppi di sostituzioni*... (Pisa, 1900), cap. VI, §§ 74, 75.

(²) Cfr. p. es. Bianchi, op. cit., cap. VI, § 76.