ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA NAZIONALE
DEI LINCEI

ANNO CCCXVIII.

1921

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXX.

2° Semestre.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1921

Le varietà anomali si distinguono facilmente da quelle normali per il valore di n_m, spesso più basso di quello della clinozoisite pura, priva di ferro, e, in ogni caso, inferiore a quello deducibile dal valore trovato per 2 V. Esse possiedono, inoltre, almeno in generale, una birifrangenza un po' più alta delle clinozoisiti normali [1]. Infine, per lo meno nelle lamine non eccessivamente sottili, presentano, per lo più, estinzione completa anche in luce bianca, il che non si verifica, come è noto, nelle clinozoisiti tipiche [2].

MEMORIE E NOTE PRESENTATE DA SOCI

Matematica. — *Sulla risoluzione dell'equazioni algebriche mediante le funzioni ipergeometriche.* Nota di GIUSEPPE BELARDINELLI, presentata dal Socio S. PINCHERLE [3].

Le recenti Note del sig. Richard Birckeland pubblicate nei Comptes Rendus de l'Académie des Sciences [4] sulla risoluzione dell'equazioni algebriche mediante le funzioni ipergeometriche, mi danno occasione di far notare come i suoi risultati siano contenuti in quelli indicati da tempo dal compianto prof. Capelli [5] e completati in una mia Memoria pubblicata recentemente negli Annali di Matematica [6]. Il Capelli considera l'equazione algebrica generale:

$$(1) \qquad \theta(y) = a_n y^n + a_{n-1} y^{n-1} + a_{n-2} y^{n-2} + \cdots + a_1 y + a_0 = 0$$

e dà delle variazioni $p_0\, p_1 \ldots p_n$ rispettivamente ai coefficienti $a_0\, a_1 \ldots a_n$ ed

(1) Il trovarsi n_p nell'angolo ottuso β non può considerarsi come una caratteristica sicura della clinozoisite. Così, i cristalli di val Maigels con 5.79 % Fe_2O_3 e $2V_{n_p} < 90°$ presentano n_p nell'angolo ottuso β, secondo Grubenmann. Altrettanto accade per i cristalli dell'Inverness-shire, positivi per la luce del tallio, ma negativi per quella del sodio, e per quello del Monte Bianco studiato nel presente lavoro.

(2) È opportuno notare, che la possibilità di esistenza di cristalli misti stereoisomeri nella serie clinozoisite-epidoto è indipendente da qualunque interpretazione della formula bruta della clinozoisite. Poichè, infatti, in essa esistono tre atomi di alluminio (sei se si prende la formula doppia), si comprende senz'altro come il ferro ferrico possa sostituire, nell'edificio cristallino, atomi di alluminio in posizione diversa, dando luogo a cristalli misti stereoisomeri. Ammettendo la interpretazione di Groth della formula della clinozoisite la spiegazione dell'esistenza di cristalli misti stereoisomeri è resa più perspicua ed elegante.

(3) Presentata nella seduta del 2 maggio 1921.

(4) Tomo 171 (1920), pag. 778 e pag. 1370. Tomo 172 (1921), pag. 309.

(5) Rend. della R. Accad. Scienze fis. e matem. di Napoli, 1907.

(6) Annali di matematica, Tomo XXIX, Serie III (1920), pag. 251 e segg.

ottiene l'equazione trasformata

$$(2) \qquad f(y) = (a_n + p_n)\, y^n + \\ + (a_{n-1} + p_{n-1})\, y^{n-1} + \cdots + (a_1 + p_1)\, y + (a_0 + p_0) = 0 .$$

Indicando con ω_0 una radice semplice e finita della (1), la (2) determina quel ramo (funzione analitica monodroma) delle $p_0 p_1 \dots p_n$ che per $p_0 = p_1 = p_2 = \cdots = p_n = 0$ assnme il valore ω_0, ramo che in un campo (R) definito da $\operatorname{mod} p_i < \mathrm{R}$ $(i = 0, 1, 2, \dots, n)$ sarà rappresentato da uno sviluppo della forma

$$(3) \qquad y = \sum_{\alpha_0 \alpha_1 \dots \alpha_n} \mathrm{A}_{\alpha_0 \alpha_1 \dots \alpha_n} p_0^{\alpha_0} p_1^{\alpha_1} \dots p_n^{\alpha_n}$$

dove le α assumono valori interi positivi o nulli qualsivogliano. Determina poi le condizioni di convergenza della serie (3) ed il coefficiente $\mathrm{A}_{\alpha_0 \alpha_1 \dots \alpha_n}$ ed ottiene:

$$(4) \qquad \mathrm{A}_{\alpha_0 \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n} = \frac{\alpha - 1!}{\alpha_0! \, \alpha_1! \dots \alpha_n!} \left(\frac{1}{2\pi i} \int_c y^{\beta} [-\theta(y)]^{-\alpha} \, dy \right)$$

ove $\beta = \alpha_1 + 2\alpha_2 + \cdots + n\alpha_n$ e $\alpha = \alpha_0 + \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$ e

$$(5) \qquad \mathrm{A}_{\alpha_0 \alpha_1 \dots \alpha_n} = \frac{\alpha!}{\alpha_0! \, \alpha_1! \dots \alpha_n!} \, \frac{(-1)^{\alpha}}{\alpha! \, b_1^{\alpha}} \sum_{k < \alpha} \binom{\beta}{\alpha - k - 1} \omega_0^{\beta + k - \alpha - 1} \times \\ \times \frac{(-1^h)\, h + \alpha - 1!}{b_1^h} \, \frac{b_2^{h_2} b_3^{h_3} \dots b_n^{h_n}}{h_2! \, h_3! \dots h_n!}$$

in cui $k = h_2 + 2h_3 + \cdots + (n-1)\, h_n$ e $h = h_2 + h_3 + \cdots + h_n$ e $b_\rho = \theta^{(\rho)}(\omega_0) : \rho!$ ove $\theta^{(\rho)}$ sta ad indicare la derivata ρ-esima calcolata nel punto ω_0.

Nella mia Memoria stabilisco differenti forme del coefficiente $\mathrm{A}_{\alpha_0 \alpha_1 \dots \alpha_n}$ e studio l'integrale [1]

$$(6) \qquad \psi(\omega_0) = \int_c \frac{\varphi(y)\, dy}{(y - \omega_0)^{\alpha}}$$

esteso ad un cerchietto c che circonda la radice ω_0 e non contenente nell'interno altre radici della $\theta(y) = 0$, dove α è intero positivo e possibile l'integrazione per parti e la derivazione sotto il segno d'integrale.

Indicando con $\omega_1 \omega_2 \dots \omega_{n-1}$ le altre radici della $\theta(y) = 0$ e ponendo che $\varphi(y)$ sia tale che

$$(7) \qquad \mathrm{B}_n \varphi'(y) + \mathrm{B}_{n-1} \varphi(y) = 0$$

[1] Pincherle S., *Sulle funzioni ipergeometriche*. Giorn. Battaglini, 1894, pag. 209.

ove

$$B_n = y(y-\omega_1)(y-\omega_2)\dots(y-\omega_n),$$

$$B_{n-1} = -\beta \prod_{i=1}^{i=n-1}(y-\omega_i) +$$

$$+\alpha \sum_{i=1}^{i=n-1}(y-\omega_1)(y-\omega_2)\dots(y-\omega_{i-1})(y-\omega_{i+1})\dots(y-\omega_n)$$

ne viene

$$\varphi(y) = y^{\beta}(y-\omega_1)^{-\alpha}\dots(y-\omega_{n-1})^{-\alpha}$$

ed

$$\text{(8)}\qquad A_{\alpha_0\alpha_1\dots\alpha_n} = \frac{\alpha-1\,!}{\alpha_0\,!\,\alpha_1\,!\dots\alpha_n\,!}\,\frac{(-1)^{\alpha}(\alpha+n-2)\dots(\alpha-1)}{2\pi i\,\alpha_n^{\alpha}}\,\psi(\omega_0)\,.$$

Poichè se $\varphi(y)$ è l'integrale di un'equazione differenziale del primo ordine (7), l'integrale (6) è l'integrale dell'equazione differenziale lineare d'ordine n del Pochammer (¹):

$$B_n\,\psi^{(n)} + \left(B_{n-1} + \binom{\alpha+n-2}{1}B'_n\right)\psi^{(n-1)} +$$

$$+\left((\alpha+n-2)\,B'_{n-1} + \binom{\alpha+n-2}{2}B''_n\right)\psi^{(n-2)} + \dots +$$

$$+\left(\binom{\alpha+n-2}{n-1}B_{n-1}^{(n-1)} + \binom{\alpha+n-2}{n}B_n^{(n)}\right)\psi = 0$$

enuncio il teorema che i coefficienti $A_{\alpha_0\alpha_1\dots\alpha_n}$ dello sviluppo in serie di una radice di un'equazione algebrica di grado n sono funzioni ipergeometriche del Pochammer di ordine n. Considero poi l'equazione trinomia

$$\text{(9)}\qquad f(y) = y^n + py^r + q = 0$$

ottenuta dall'equazione

$$\theta(y) = y^n + q = 0$$

per una variazione p al coefficiente di y^r che in $\theta(y)$ è uguale allo zero, e determinati i punti critici e formata la stella di Mittag-Leffler ottengo la funzione algebrica in serie di polinomi che la rappresenta in tutto il campo di validità. Indicando con $\varphi_0(p)\,,\varphi_1(p)\,,\dots,\varphi_{n-1}(p)$ le n radici della (9) ho:

$$\varphi_n(p) = \sum_{0}^{\infty}\left(\lambda_{\alpha_0}c_0 + \lambda_{\alpha_1}c_1\,p + \dots + \lambda_{\alpha_{s_\alpha}}c_{s_\alpha}p^{s\alpha}\right)$$

(¹) Pochammer, Journal de Crelle, Tomo 71 (1870), pag. 324.

ove

$$c_\alpha = \frac{\omega_\eta^{r\alpha+1}}{\alpha q^\alpha n} \begin{pmatrix} \frac{r\alpha+1}{n} - 1 \\ \alpha - 1 \end{pmatrix} \qquad (\eta = 0, 1, 2, \dots n-1)$$

ed $\lambda_{\alpha_0}, \lambda_{\alpha_1}, \dots \lambda_{\alpha_{s_\alpha}}$ numeri che vengono una volta tanto determinati. Poi ottengo le radici dell'equazione

$$y^n + my^s + py^r + q = 0$$

mediante sviluppi in serie di polinomi i cui coefficienti sono funzioni ipergeometriche di $\varphi_0(p)\,\varphi_1(p) \dots \varphi_{n-1}(p)$ serie di polinomi procedenti secondo le potenze di m. E così di seguito sino all'equazione di grado n avente i coefficienti prefissati per modo che stabilisco un metodo generale per la risoluzione dell'equazioni algebriche mediante le funzioni ipergeometriche: risultati in cui sono contenuti quelli del sig. Birckeland. Infatti, considerando l'equazione algebrica di grado n sotto la forma

$$y = y^n - (p_1 + p_2 y^2 + \dots + p_{n-1} y^{n-1})$$

ed indicando con y_η $(\eta = 0, 1, 2, \dots, n-1)$ le n radici, egli ottiene

$$(10) \qquad y\eta = \omega^\eta + \sum_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_{n-1}} \omega^{s\eta} p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_{n-1}^{\alpha_{n-1}} A_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_{n-1}} (\xi_1\,\xi_2 \dots \xi_{n-1})$$

ove ω è una radice primitiva dell'equazione $y^{n-1} = 1$, la somma $\sum\limits_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_{n-1}}$ estesa ai valori $0, 1, \dots, n-1$ per tutte le α, ed è

$$\xi_\lambda = p_\lambda^{n-1} \qquad s = \alpha_2 + 2\alpha_3 + \dots + (n-2)\,\alpha_{n-1} - \alpha_1 + 1$$

e

$$(11) \qquad A_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_{n-1}} = \sum_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_{n-1}} K_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_{n-1}} \xi_1^{\alpha_1} \xi_2^{\alpha_2} \dots \xi_{n-1}^{\alpha_{n-1}}.$$

Come vedesi, $A_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_{n-1}}$ è una formazione particolare di (5) ed è evidente che

$$(12) \qquad \frac{K_{\alpha_1+1,\alpha_2,\dots\alpha_{n-1}}}{K_{\alpha_1,\alpha_2,\dots\alpha_n}}, \quad \frac{K_{\alpha_1,\alpha_2+1,\alpha_3,\dots\alpha_n}}{K_{\alpha_1,\alpha_2,\dots\alpha_n}}, \dots, \frac{K_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_{n-1}+1}}{K_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_n}}$$

sono funzioni razionali dell'indice n.

Definendo come si fa da molti autori, come funzioni ipergeometriche quelle funzioni di più variabili che sviluppate in serie come le (11) hanno tutti i rapporti (12) dei coefficienti funzioni razionali dell'indice n, si vede che le $A_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_{n-1}}$, sono funzioni ipergeometriche e ciò non è che una conseguenza del mio teorema per il quale i coefficienti sono funzioni ipergeometriche generalizzate nel senso di Pochammer.