ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA NAZIONALE

DEI LINCEI

ANNO CCCXVIII.

1921

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXX.

2° Semestre.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1921

Matematica. — *Divisori di un numero.* Nota di PIER ANDREA FONTEBASSO, presentata dal Socio T. LEVI-CIVITA [1].

1. La ricerca dei divisori di un numero è certamente uno degli argomenti più importanti della teoria dei numeri e, come insegna l'Aritmetica elementare, essa si effettua applicando il noto Crivello di Eratostene. Lasciando i numeri pari (potendo sempre ridurre la ricerca dei divisori di un numero pari alla ricerca dei divisori di un numero dispari) si sa che la determinazione di tutti i divisori di un numero dispari N è al più dell'ordine $E\frac{K}{2}$, essendo $K = E\sqrt{N}$.

Io mi propongo nella presente Nota di indicare un nuovo algoritmo costruttivo di tutti i divisori di un numero dispari N.

In verità se il nuovo metodo presenta grande vantaggio per la rapidità con la quale si effettuano i successivi tentativi, non presenta sempre un vantaggio rispetto al loro numero, perchè può in definitiva risultare dell'ordine $\frac{N+1}{2} - K$.

Però il procedimento che esporrò è, a mio parere, di un qualche interesse oltre per il modo col quale procede, anche perchè consente di assegnare con un minor numero di tentativi di quelli richiesti col metodo ordinario, i divisori complementari a, b $(a > b)$ che soddisfano alle condizioni $a < 2K$ o $a + 2b < 3K$ secondo che col metodo classico si proceda nel senso da 1 a K o viceversa.

2. TEOREMA. — *Dato un numero dispari* N, *posto*

$$E\sqrt{N} = K$$
$$R \text{ (resto)}$$

si formi la successione

$$(1) \qquad 2K + 1 - R\,;\ 2K + 3\,;\ 2K + 5\,;\ \ldots\ldots\ N$$

e da questa l'altra

$$(2) \qquad 2K + 1 - R\,;\ 4K + 4 - R\,;\ 6K + 9 - R\,;\ \ldots\ldots$$

[1] Presentata nella seduta del 2 maggio 1921.

i cui termini sono il primo termine della (1), *la somma dei primi due, la somma dei primi tre ecc., la somma di tutti i termini. Ad ogni termine della* (2) *che è quadrato* ([1]), *corrisponde una coppia di divisori complementari disuguali di* N *e propriamente se è quadrato l'emmesimo termine* $m^2 + 2m\mathrm{K} - \mathrm{R}$, *ad esempio*

$$m^2 + 2m\mathrm{K} - \mathrm{R} = n^2, \tag{3}$$

$\mathrm{K} + m \pm n$ *sono due divisori complementari di* N.

Reciprocamente, ad ogni coppia di divisori di N, *complementari e disuguali, corrisponde nella* (2) *un termine che è quadrato e propriamente se i divisori sono* **a**, **b** $(a > b)$ *è quadrato il termine della* (2) *che è somma di* $\dfrac{a+b-2\mathrm{K}}{2}$ ([2]) *termini della* (1); *da questo quadrato si ha la coppia di divisori* **a**, **b**.

Per dimostrare la prima parte del Teorema, cioè che $\mathrm{K} + m \pm n$ sono due divisori complementari di N, basterà provare che il loro prodotto è uguale ad N.

Infatti:

$$\begin{aligned}(\mathrm{K} + m + n)(\mathrm{K} + m - n) &= \mathrm{K}^2 + m^2 + 2m\mathrm{K} - n^2 \quad \text{e per la (3)}\\ &= \mathrm{K}^2 + m^2 + 2m\mathrm{K} - m^2 - 2m\mathrm{K} + \mathrm{R}\\ &= \mathrm{K}^2 + \mathrm{R}\\ &= \mathrm{N}\end{aligned}$$

come appunto si doveva dimostrare.

Siano ora a, b $(a > b)$ due divisori complementari di N e proviamo che il termine della (2) che è somma di $\dfrac{a+b-2\mathrm{K}}{2}$ termini della (1) è un quadrato.

Infatti, ricordando che l'ennesimo termine della (2) è dato da $m^2 - 2m\mathrm{K} - \mathrm{R}$ ponendo $m = \dfrac{a+b-2\mathrm{K}}{2}$, si ha il termine della (2)

[1] Si otterrà sempre almeno un quadrato, perchè tale è certamente la somma di di tutti i termini, somma che è uguale ad $\left(\dfrac{\mathrm{N}-1}{2}\right)^2$.

[2] $\dfrac{a+b-2\mathrm{K}}{2}$ è uguale o minore al numero dei termini della (2), perchè essendo $a + b \leqq \mathrm{N} + 1$ si ha anche: $\dfrac{a+b-2\mathrm{K}}{2} \leqq \dfrac{\mathrm{N}-2\mathrm{K}+1}{2}$ ed è appunto questo valore il numero dei termini della (2).

$$\left(\frac{a+b-2K}{2}\right)^2 + 2K\cdot\frac{a+b-2K}{2} - R =$$

$$= \frac{a^2+b^2+4K^2+2ab-4aK-4bK+4aK+4bK-8K^2-4R^2}{4}$$

$$= \frac{a^2+b^2+2ab-4(K^2+R)}{4}$$

$$= \frac{a^2+b^2+2ab-4N}{4}$$

$$= \frac{a^2+b^2+2ab-4ab}{4}$$

$$= \left(\frac{a-b}{2}\right)^2$$

che è un quadrato.

Da questo quadrato, operando come si è detto, si hanno i divisori

$$K+\frac{a+b-2K}{2}+\frac{a-b}{2} \quad \text{e} \quad K+\frac{a+b-2K}{2}-\frac{a-b}{2}$$

cioè, riducendo, rispettivamente a, b come appunto si doveva provare.

3. Esempio. Per $N = 59055827$ si ha:

$$E\sqrt{59055827} = 7684$$
$$11971 \text{ (resto)}$$

formata la successione analoga alla (2) si trova che il secondo termine 18769 di questa è un quadrato e propriamente il quadrato di 137:

$$7684 + 2 \pm 137 = \begin{cases} 7823 \\ 7549 \end{cases}$$

saranno due divisori complementari del dato numero e propriamente due divisori primi.

4. Osservazione. Indicando con a, b due divisori complementari di N ottenuti dall'emmesimo termine della (2) quadrato di n si ha

$$a = K + m + n$$
$$b = K + m - n$$

dalle quali

(4)
$$m = \frac{a+b}{2} - K$$
$$n = \frac{a-b}{2}.$$

La (4) ci dice che il *numero dei tentativi per trovare una coppia di divisori complementari di un numero dispari* N *è uguale alla differenza fra la media aritmetica e la parte intera della media geometrica dei divisori stessi.*

5. Da quanto precede si ricava la regola per trovare tutti i divisori di un numero dispari N, notando che se il numero è un quadrato, oltre i divisori trovati bisogna considerare il divisore K.

Si ha poi che *la condizione necessaria e sufficiente perchè un uumero* N *sia primo è che la* (2) *abbia quadrato solo l'ultimo termine.*

6. Ricordando che se il prodotto di due numeri è costante, la loro somma è tanto minore quanto è minore la loro differenza, indicando, ad esempio, con

$$1\,, a\,, b\,, c\,, d\,, \mathrm{N}$$

tutti i divisori di N disposti in ordine di grandezza, dalla (4) si ha che nella loro determinazione si troveranno successivamente le coppie di divisori $b\,, c$; $a\,, d$; $1\,, \mathrm{N}$ cioè, incominciando dalla coppia più centrale, le coppie successive di divisori equidistanti dagli estremi.

Da ciò si ricava che se il numero N non è divisibile per nessun numero primo inferiore ad un numero primo p, per trovare i divisori di N, l'unità ed N esclusi, basta limitare la (2) ad un numero di termini dato da

$$\mathrm{E}\frac{p+\dfrac{\mathrm{N}}{p}}{2}-\mathrm{K} \quad \text{cioè} \quad \mathrm{E}\frac{p^2+\mathrm{N}}{2p}-\mathrm{K}\,.$$

7. Proviamo ora che il metodo esposto presenta dei vantaggi, oltre che per il procedimento più rapido nei varî tentativi, anche per il numero di questi per coppie di divisori complementari $a\,, b$ $(a > b)$ che soddisfano alle relazioni:

$$(5) \quad a < 2\mathrm{K}\,; \qquad (6) \quad a+2b < 3\mathrm{K}$$

secondo che col procedimento classico si proceda da sinistra a destra o viceversa.

Infatti, nel primo caso il numero dei tentativi per determinare $a\,, b$ è $\mathrm{E}\frac{b}{2}$, col nuovo metodo $\frac{a+b}{2}-\mathrm{K}$ e poichè dalla (5) si ha

$$a+b-2\mathrm{K} < b$$

sarà anche

$$\frac{a+b}{2}-\mathrm{K} < \mathrm{E}\frac{b}{2}\,.$$

Nel secondo caso sarà $E\frac{K-b}{2}$ il numero dei tentativi col vecchio metodo, e poichè dalla (6) si ha

$$a < 3K - 2b,$$

sarà

$$\frac{a+b}{2} - K < \frac{3K - 2b + b}{2} - K,$$

cioè

$$\frac{a+b}{2} - K < E\frac{K-b}{2}.$$

È chiaro che affinchè il nuovo metodo sia vantaggioso in ogni caso, bisògna che siano soddisfatte nello stesso tempo le (5), (6), ciò che avverrà in innumerevoli casi.

Fisica. — *Sul luogo fisico delle frangie nella doppia rifrazione accidentale meccanica di un liquido in moto piano permanente* [1]. Nota del dott. ALDO PONTREMOLI, presentata dal Socio CORBINO [2].

In un lavoro, già da tempo licenziato e che sta per apparire, ho tentato di giungere ad una teoria della doppia rifrazione accidentale meccanica dei liquidi deformati in modo tale che l'asse dell'ovaloide di Fresnel, iniziale indeformato (secondo il quale si osserva), non si alteri durante il moto permanente del liquido stesso.

Questa condizione restrittiva, introdotta allo scopo di poter considerare il caso in cui tutti i piani perpendicolari all'asse di osservazione siano sede di fenomeni uguali e ugualmente distribuiti, equivale analiticamente alla condizione che le grandezze impiegate non siano funzione delle coordinate dell'asse di osservazione.

Dall'applicazione dei postulati di Neumann e attraverso i concetti fondamentali di Maxwell arrivammo ad esplicitare la birifrangenza, osservata tra nicols incrociati in un punto del liquido, in funzione delle velocità locali di dilatazione e di scorrimento, mediante una formula

$$(1) \qquad \Delta_z = \frac{\pi s_z n^3}{\lambda c^2} \cdot pT \cdot \sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)^2}$$

(1) Lavoro eseguito nel R. Istituto di Fisica di Roma.

(2) Presentata nella seduta del 3 giugno 1921.