ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA NAZIONALE

DEI LINCEI

ANNO CCCXVIII.

1921

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXX.

2° Semestre.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1921

Orbene il Carazzi ignora che il Golgi non ha parlato di tre specie distinte, ma di *varietà che potrebbero trasformarsi l'una nell'altra, varietà di una sola e medesima specie* (¹).

Potrei moltiplicare gli esempi, ma questo è proprio il caso di dire *ab uno disce omnes*. Tutte le critiche mossemi dal Carazzi non hanno base. E mi impongo il dovere di non aggiungere altro.

MEMORIE E NOTE PRESENTATE DA SOCI

Matematica. — *Proprietà differenziale caratteristica delle superficie che rappresentano la totalità delle curve piane algebriche di dato ordine*. Nota di E. Bompiani, presentata dal Socio G. Castelnuovo (²).

1. Il prof. Segre ha dato di recente una nuova proprietà caratteristica dalla superficie di Veronese (sup. di S_5 a tangenti principali indeterminate) (³).

Dò in questa nota un teorema generale che caratterizza le superficie razionali normali indicate nel titolo: già nel primo caso che si presenta, al quale limito per necessità di spazio la dimostrazione, si ha una nuova proprietà tipica delle superficie di Veronese.

2. Mi occorre richiamare alcune definizioni (⁴).

Data una superficie in S_n, descritta dal punto x di coord. proiet. omog. $x_i(\tau_1, \tau_2)$ $(i = 1, \ldots, n+1)$, chiamo *spazio r-osculatore* in x, e l'indico con $S(r)$, quello che contiene gli S_r osculatori alle curve della superficie uscenti dal punto; la sua dimensione è in generale $\dfrac{r(r+3)}{2}$ se questa è $\leq n$.

(¹) Così per esempio a pag. 1094 — Golgi, *Opera Omnia*, vol. III, si legge:
« Nello stesso tempo, però, l'accenno di sviluppo, dianzi da me notato per alcune di quelle forme ameboidi, fa pensare alla possibilità che, eccezionalmente anche giovani forme derivanti dalle semilune, possano, se per avventura dotate di maggior resistenza, procedere nel loro sviluppo fino alla segmentazione ed assumere, così, i caratteri ed il significato dei parassiti a sviluppo ciclico proprio della terzana e quartana. Clinicamente ciò tradurrebbesi nella sovrapposizione di una febbre terzana o quartana ad una febbre irregolare. Il reperto fornito nei primi giorni di degenza nell'ospedale dal caso, sul quale io ho qui particolarmente richiamata l'attenzione, darebbe fondamento a questa supposizione ».

(²) Presentata nella seduta del 19 giugno 1921.

(³) C. Segre, *Le linee principali di una superficie di S_5*, ecc. (Rend. Acc. Lincei, 1921, fasc. 7, 8).

(⁴) Cfr. p. es. i miei lavori: *Sopra alcune estensioni dei teoremi di Meusnier e di Eulero* (Acc. delle Scienze di Torino, 1912) e *Sullo spazio d'immersione di superficie possedenti dati sistemi di curve* (R. Istituto Lombardo di scienze, lettere ed arti, 1914).

Lo spazio che congiunge lo $S(r)$ osculatore ad una superficie in un punto con lo $S_s(s > r)$ osculatore ad una curva uscente dal punto ha in generale per dimensione quella dello $S(r)$ aumentata di s-r (purchè, ben inteso, il numero ottenuto sia $\leq n$): se sulla superficie esiste una curva, nei punti della quale quello spazio congiungente abbia dimensione minore, chiamo la curva *quasi-asintotica* $\gamma_{r,s}$ (i due indici r, s dànno gli ordini di osculazione dei due spazi osculatori alla superficie e alla curva il cui spazio congiungente ha dimensione minore di quella che si avrebbe per una curva generica).

Il teorema è il seguente:

Se lo $S(k)$ *osculatore generico di una superficie ha dimensione regolare* $\dfrac{k(k+3)}{2}$ *e se la superficie possiede* ∞^2 *quasi-asintotiche* $\gamma_{k-1,k+1}$, *essa è la superficie razionale normale* $F_2^{k^2}$ *di* $S_{\frac{k(k+3)}{2}}$ *che rappresenta la totalità delle curve piane di ordine* k. *Quelle* $\gamma_{k-1,k+1}$ *appartengono ad* S_k *e sono le curve razionali normali* C^k *della superficie.*

3. Dimostriamo il teor. per $k=2$. Posto $x^{hk} = \dfrac{\partial^{h+k} x}{\partial \tau_1^h\, \partial \tau_2^k}$ e $\tau_2 = \tau_2(\tau_1)$ sulle $\gamma_{1,3}$ sono legati linearmente su di esse i punti (le cui coordinate si ottengono ponendo l'indice i alle x):

$$x\,,\ x^{10}\,,\ x^{01}\,,\ x^{20} + 2x^{11}\tau_2' + x^{02}\tau_2'^2\,,\ F_3 + 3(x^{11} + x^{02}\tau_2')\tau_2''$$

ove

$$F_3 = x^{30} + 3x^{21}\tau_2' + 3x^{12}\tau_2'^2 + x^{03}\tau_2'^3\,;$$

ciò può esprimersi scrivendo che sulle $\gamma_{1,3}$

$$\left\| \begin{array}{c} x \\ x^{10} \\ x^{01} \\ x^{20} + 2x^{11}\tau_2' + x^{02}\tau_2'^2 \\ F_3 + 3(x^{11} + x^{02}\tau_2')\tau_2'' \end{array} \right\| = 0 \tag{1}$$

intendendo con questa notazione di annullare i determinanti del 5° ordine estratti dalla matrice (a 5 righe ed $n+1$ colonne).

Alle equazioni così indicate non è in generale possibile soddisfare; ma se per ipotesi sulla superficie esistono $\infty^2 \gamma_{1,3}$, le precedenti debbono ridursi ad un'unica equazione differenziale del 2° ordine in τ_2; per la loro compatibilità, considerate come equazioni lineari in τ_2'', occorre e basta che, *qualunque sia* τ_2', risulti [1]

[1] Questa, che per me è condiz. necess. e suffic. per l'esistenza delle $\infty^2 \gamma_{1,3}$, è, per $n=5$, l'equazione da cui parte il prof. Segre.

$$\left\| \begin{array}{c} x \\ x^{10} \\ x^{01} \\ x^{20} + x^{11}\tau_2' \\ x^{12} + x^{02}\tau_2' \\ F_3 \end{array} \right\| = 0 \tag{2}$$

4. Vogliamo provare che le $\gamma_{1,3}$, definite dalla (1), *sono piane*. Assunte ∞^1 di esse come linee $\tau_1(\tau_2' = \tau_2'' = 0)$, si ha

$$x^{30} = (x^{20}, x^{10}, x^{01}, x) \tag{3}$$

indicando la parentesi a secondo membro una combinazione lineare di x e delle derivate scritte, i cui coefficienti, funzioni di τ_1, τ_2, sono indipendenti dall'indice i delle x; in altri termini, si ha, per le scelta delle linee τ_1, un'equaz. lin. omog. a derivate parz. del 3° ordine, soddisfatta da tutte le x_i.

In forza di questa, l'annullarsi del coefficiente di τ_2' nella (2) dà l'altra equazione

$$x^{21} = (x^{20}, x^{11}, x^{10}, x^{01}, x) \tag{4}$$

[si potrebbero ricavare altre equazioni annullando nella (2) i coefficienti delle successive potenze di τ_2', ma non ce n'è bisogno].

Scriviamo le condizioni d'integrabilità fra (3) e (4), tenendo conto che, per essere $S(2) = S_5$, le x non possono essere soluzioni di equaz. a derivate parz. lin. omog. del 2° ordine.

La derivata x^{31}, tratta dalla (3), contiene x^{02} se e solo se la (3) contiene x^{01}; ma essa deve coincidere, in forza delle equazioni stesse, con la espressione di x^{31} ricavata dalla (4) che *non* contiene x^{02}; quindi, non esistendo equazioni che permettano di esprimere x^{02} per mezzo di altre derivate d'ordine ≤ 3, nella (3) deve mancare x^{01}, cioè si ha

$$x^{30} = (x^{20}, x^{10}, x) \tag{3'}$$

e questa esprime proprio che le curve τ_1, cioè tutte le $\gamma_{1,3}$, sono piane.

5. Si proietti ora la superficie, data in S_n, da una sua corda sopra un S_{n-2}: alle ∞^1 curve piane passanti per ciascuno dei punti di appoggio corrispondono, sulla superficie proiezione, rette: questa è dunque doppiamente rigata (non potendo i due sistemi di rette coincidere per la genericità della corda) e non è piana, altrimenti la superficie data starebbe in S_4 contro la ipotesi $S(2) = S_5$; quindi è una quadrica, e perciò la superficie data è la F_2^4 di Veronese, c. v. d.

6. I caratteri salienti del procedimento, che si conservano nella dimostrazione relativa al caso generale, emergono dalle osservazioni seguenti:

1) l'esistenza di ∞^2 *linee proiettivamente specializzate* sulla superficie, cioè la possibilità di soddisfare con una stessa funzione $\tau_2(\tau_1)$ alle condizioni raccolte in (1), dà luogo ad un sistema di equazioni a derivate parziali soddisfatte dalle coordinate di tutti i punti della superficie;

2) l'uso (di alcune) delle condizioni d'integrabilità che hanno significato geometrico evidente (e non di tutte; una sola nel caso trattato) dà subito un carattere notevole di quelle linee (l'esser piane);

3) la determinazione della superficie (algebricità, ordine, ambiente) segue ormai da sole considerazioni geometriche (senza più ricorrere alle equazioni a derivate parziali del problema).

Matematica. — *Le superficie ellittiche il cui determinante è un numero composto.* Nota II del dott. Oscar Chisini, presentata dal Corrispondente F. Enriques (¹).

3. Veniamo ora alla costruzione delle nostre superficie ellittiche F rappresentate sul cilindro ellittico Φ di equazione $\varphi(xy) = 0$, contato n volte, avendosi una curva di diramazione composta delle sezioni $z = \text{cost}$.

Cominciamo col ricordare che quando un punto P del cilindro Φ si muove su di questo ritornando in sè stesso, gli n punti di F: $P_1 P_2 \ldots P_n$, corrispondenti di P, subiscono delle sostituzioni che formano un gruppo abeliano Γ (²); e poichè questo Γ ammette come sottogruppo il gruppo G (delle sostituzioni che si ottengono movendo P sopra una sezione $z = \text{cost}$. del cilindro) il quale è transitivo sugli n punti $P_1 \ldots P_n$, segue che Γ coincide con G (infatti un gruppo abeliano transitivo possiede una sola operazione che porti P_1 in P_i ed ha ordine uguale al grado).

L'osservazione fatta esprime che la sostituzione relativa a una curva di diramazione $z = k_i$ nel caso ciclico (in cui G è generato da una sola operazione π) sarà del tipo π^{r_i}, e nel caso non ciclico (in cui G è generato da π_1 e π_2) sarà invece del tipo $\pi_1^{r_{1i}} \pi_2^{r_{2i}}$.

Ora si potrà avere una superficie F avente il gruppo indicato scrivendo: nel caso ciclico

$$\left\{\begin{array}{l} X = \sqrt[n]{\psi(xy)\,\theta(z)} \\ Y = y\,,\; Z = z \end{array}\right. \qquad \varphi(xy) = 0 \tag{3}$$

$$\text{con } \theta(z) = \Pi(z - k_i)^{r_i}\,;$$

(¹) Presentata nella seduta del 17 aprile 1921.

(²) Cfr. F. Enriques, op. cit., § 6 (pag. 18 dell'estratto).