ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

ANNO CCCXVIII.

1921

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXX.

2° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1921

6. I caratteri salienti del procedimento, che si conservano nella dimostrazione relativa al caso generale, emergono dalle osservazioni seguenti:

1) l'esistenza di ∞^2 *linee proiettivamente specializzate* sulla superficie, cioè la possibilità di soddisfare con una stessa funzione $\tau_2(\tau_1)$ alle condizioni raccolte in (1), dà luogo ad un sistema di equazioni a derivate parziali soddisfatte dalle coordinate di tutti i punti della superficie;

2) l'uso (di alcune) delle condizioni d'integrabilità che hanno significato geometrico evidente (e non di tutte; una sola nel caso trattato) dà subito un carattere notevole di quelle linee (l'esser piane);

3) la determinazione della superficie (algebricità, ordine, ambiente) segue ormai da sole considerazioni geometriche (senza più ricorrere alle equazioni a derivate parziali del problema).

Matematica. — *Le superficie ellittiche il cui determinante è un numero composto.* Nota II del dott. OSCAR CHISINI, presentata dal Corrispondente F. ENRIQUES [1].

3. Veniamo ora alla costruzione delle nostre superficie ellittiche F rappresentate sul cilindro ellittico Φ di equazione $\varphi(xy)=0$, contato n volte, avendosi una curva di diramazione composta delle sezioni $z=\text{cost.}$

Cominciamo col ricordare che quando un punto P del cilindro Φ si muove su di questo ritornando in sè stesso, gli n punti di F: $P_1 P_2 \dots P_n$, corrispondenti di P, subiscono delle sostituzioni che formano un gruppo abeliano Γ [2]; e poichè questo Γ ammette come sottogruppo il gruppo G (delle sostituzioni che si ottengono movendo P sopra una sezione $z=\text{cost.}$ del cilindro) il quale è transitivo sugli n punti $P_1 \dots P_n$, segue che Γ coincide con G (infatti un gruppo abeliano transitivo possiede una sola operazione che porti P_1 in P_i ed ha ordine uguale al grado).

L'osservazione fatta esprime che la sostituzione relativa a una curva di diramazione $z=k_i$ nel caso ciclico (in cui G è generato da una sola operazione π) sarà del tipo π^{r_i}, e nel caso non ciclico (in cui G è generato da π_1 e π_2) sarà invece del tipo $\pi_1^{r_{1i}}\pi_2^{r_{2i}}$.

Ora si potrà avere una superficie F avente il gruppo indicato scrivendo: nel caso ciclico

$$\left\{\begin{array}{l} X=\sqrt[n]{\psi(xy)\,\theta(z)} \\ Y=y\,,\ Z=z \end{array}\right. \qquad \varphi(xy)=0 \tag{3}$$

$$\text{con } \theta(z)=\Pi(z-k_i)^{r_i};$$

(1) Presentata nella seduta del 17 aprile 1921.

(2) Cfr. F. ENRIQUES, op. cit., § 6 (pag. 18 dell'estratto).

e nel caso non ciclico

$$(4)\quad \begin{cases} X = \sqrt[\nu_1]{\psi_1(xy)\,\theta_1(z)} + \sqrt[\nu_2]{\psi_2(xy)\,\theta_2(z)} & \varphi(xy) = 0 \\ Y = y \quad Z = z \end{cases}$$

$$\text{con } \theta_1(z) = \Pi(z - k_i)^{r_{1i}}\,,\ \theta_2(z) = \Pi(z - k_i)^{r_{2i}}$$

$$(n = \nu_1\,\nu_2\,,\ \nu_1 = \varrho^{\nu_2} \text{ con } \varrho \geq 1)$$

ove $\psi = 0$, $\psi_1 = 0$, $\psi_2 = 0$ sono curve aventi un contatto d'ordine $n - 1$, $\nu_1 - 1$, $\nu_2 - 1$, ovunque incontriamo la φ.

Conviene dire che la superficie F di cui si è scritta l'equazione è proprio di determinante n e non minore di n quando la curva ellittica K sia irriducibile.

La distinzione delle superficie F *birazionalmente diverse, si collega a quella della distinzione delle curve ellittiche n-ple* K, *tuttavia non coincide con essa, potendosi avere superficie* F *diverse relative a curve* K *identiche*, non solo nel caso in cui siano differenti i sistemi di curve di diramazione $z = k_i$, ma anche nel caso in cui questi coincidano: il che vedremo esattamente in una prossima Nota (n. 5).

4. Vogliamo ora esaminare quando la curva K rappresentata nei due casi rispettivamente dalle equazioni (1) e (2) risulti irriducibile, e quando si ottengano così funzioni X birazionalmene distinte.

Cominciamo dal caso ciclico, in cui G è generato da una sostituzione $\pi = (1, 2, \ldots n)$, e assumiamo come modello proiettivo della curva ellittica una cubica $\varphi_3(xy) = 0$; su questa le rette del piano segheranno una g_3^2 definita dalla relazione

$$u_1 + u_2 + u_3 \equiv 0 \pmod{\omega_1\,,\ \omega_2}$$

essendo u_1, u_2, u_3 i valori dell'integrale ellittico u nei tre punti di un gruppo della g_3^2, ed ω_1, ω_2 i periodi di detto integrale relativi ai cicli A e B.

Si consideri ora una curva d'ordine n $\psi(xy) = 0$ avente con φ tre contatti n-punti: questi saranno definiti dalla relazione

$$n(u_1 + u_2 + u_3) \equiv 0 \pmod{\omega_1\,,\ \omega_2}:$$

qualora i tre contatti della ψ appartengano alla serie (n^{esima} parte della g_{3n}^{3n-1} segata dalle curve di ordine n)

$$u_1 + u_2 + u_3 \equiv r\,\frac{\omega_1}{n} + s\,\frac{\omega_2}{n} \qquad \pmod{\omega_1\,,\ \omega_2}\,,$$

la funzione

$$X = \sqrt[n]{\psi(xy)}\,,\ \varphi(xy) = 0$$

ammette relativamente ai cicli A e B di φ, le sostituzioni

$$\alpha = (1, 2, \ldots n)^r \ , \ \beta = (1, 2, \ldots n)^s \ , \ (^1)$$

essendo $(1, 2, \ldots n)$ la sostituzione che si ottiene moltiplicando il radicale per $\varepsilon = \cos \frac{2\pi}{n} + i \operatorname{sen} \frac{2\pi}{n}$.

E si avverta che se h è un numero primo con n esiste una sostituzione τ che trasforma

$$\alpha = (1, 2, \ldots n)^r \text{ in } \alpha' = (1, 2, \ldots n)^{hr} \quad \text{e}$$

$$\beta = (1, 2, \ldots n)^s \text{ in } \beta' = (1, 2, \ldots n)^{hs},$$

sicchè si ottiene una funzione X birazionalmenle identica alla precedente, ove la curva ψ abbia i tre contatti appartenenti alla g_3^2 definita da

$$u_1 + u_2 + u_3 \equiv hr \frac{\omega_1}{n} + hs \frac{\omega_2}{n} \qquad (\text{mod. } \omega_1, \omega_2).$$

E non vi può essere altra X birazionalmente identica alla precedente: infatti siano α' e β' le sostituzioni relative ad A e B per una siffatta X: saranno α' e β' simili ad α e β, cioè

$$\alpha' = \tau\alpha\tau^{-1} \ , \ \beta' = \tau\beta\tau^{-1} \ ;$$

ma poichè α e β generano tutto G, sarà $\pi = \alpha^i\beta^k$, e $\pi' = \alpha'^i\beta'^k$ riuscirà una potenza di π, $\pi' = \pi^h$, onde appare che τ trasforma π in π^h e che h è primo con n.

Tutte le possibili funzioni X, cicliche d'ordine n, si ottengono dunque in corrispondenza di curve ψ, d'ordine n, tritangenti alla φ; e la condizione di irriducibilità è data, evidentemente, dall'essere primi fra loro i tre numeri r, s, n, il che porta, come è chiaro, che i punti di contatto della ψ non siano equivalenti a quelli di una curva di ordine m, divisore di n, avente con φ tre contatti m-punti.

Ci conviene ora definire come *simili* (rispetto al numero n) due gruppi D e D' di contatto di due curve ψ e ψ' quando appartengano alle due g_3^2

$$u_1 + u_2 + u_3 \equiv r \frac{\omega_1}{n} + s \frac{\omega_2}{n} \qquad (\text{mod. } \omega_1, \omega_2) \quad \text{e}$$

$$u_1 + u_2 + u_3 \equiv hr \frac{\omega_1}{n} + hs \frac{\omega_2}{n} \qquad (\text{mod. } \omega_1, \omega_2)$$

ove h è primo con n.

(1) Cfr. la mia Nota in questi Rendiconti: *Sulle superfici di Riemann multiple prive di punti di diramazione*", 17 gennaio 1915.

Indicando con T un gruppo della g_3^2 segato dalle rette, si vede che *fra i gruppi simili* D *e* D' *sussiste la relazione di equivalenza*

$$D' + (h-1)\,T \equiv hD \qquad (h \text{ primo con } n)$$

o la simmetrica

$$D + (k-1)\,T \equiv kD' \qquad (k \text{ primo con } n)$$

dove $hk \equiv 1$ mod. n.

L'osservazione precedente dice che al gruppo D', simile al gruppo D, corrispondono le sostituzioni $\alpha' = \alpha^h$, $\beta' = \beta^h$, simili alle sostituzioni α e β relative al D, e viceversa.

Pertanto si conclude che il numero delle curve n-ple ciclicle K, birazionalmente distinte, è dato dal numero delle coppie di numeri r ed s (compresi tra 1 ed n) primi con n, diviso per il numero dei valori h primi con n e ad esso inferiori: ciascuna di queste K è definita in rapporto alla posizione dei punti critici apparenti (contatti di ψ e φ), avendosi *funzioni* X *di una stessa famiglia in corrispondenza a gruppi simili.*

Passiamo ora al caso non ciclico.

La curva K, i cui punti si esprimono mediante due radicali d'ordine ν_1 e ν_2 portanti su ψ_1 e ψ_2, e della quale abbiamo assunto l'espressione

$$(2) \qquad X = \sqrt[\nu_1]{\psi_1(xy)} + \sqrt[\nu_2]{\psi_2(xy)} \quad , \quad \varphi(xy) = 0\,,$$

può essere considerata come la curva delle coppie dei punti omologhi di due curve K_1 e K_2 di equazioni rispettivamente

$$X_1 = \sqrt[\nu_1]{\psi_1} \ , \ X_2 = \sqrt[\nu_2]{\psi_2} \quad , \quad (\varphi(xy) = 0)$$

ove si assumano come omologhi due punti di K_1 e K_2 corrispondenti a un medesimo punto di φ (aventi uguali le coordinate x e y). Si vede così che K riuscirà irriducibile (o meno) insieme alla detta corrispondenza $[\nu_2\, \nu_1]$ fra K_1 e K_2.

Ora è chiaro che se le torne di contatto di ψ_1 e ψ_2 sono simili rispetto a un numero ν, divisore comune di ν_1 e ν_2, le funzioni

$$X_1' = \sqrt[\nu]{\psi_1} \ \text{ e } \ X_2' = \sqrt[\nu]{\psi_2}\,.$$

risulteranno identiche, e poichè

$$X_1 = (X_1')^{\frac{\nu}{\nu_1}} \ , \ X_2 = (X_2')^{\frac{\nu}{\nu_2}}\,,$$

la corrispondenza suddetta si spezza in ν corrispondenze, rispetto a ciascuna delle quali i ν_1 punti di K_1 (relativi a un medesimo punto di φ) si dividono in ν gruppi Γ_1 di $\frac{\nu_1}{\nu}$ punti, e similmente i ν_2 punti di K_2 si dividono in ν gruppi Γ_2 di $\frac{\nu_2}{\nu}$ punti.

E viceversa, se la corrispondenza $[\nu_2\,\nu_1]$ si spezzasse in ν corrispondenze, i ν_1 punti di K_1 si dividerebbero in ν gruppi Γ_1 e i ν_2 punti di K_2 si dividerebbero in ν gruppi Γ_2, avendosi corrispondenza biunivoca fra i Γ_1 e i Γ_2; e poichè è chiaro che i gruppi Γ_1 e Γ_2 sarebbero i cicli di π_1^ν e π_2^ν, (un Γ_1 o un Γ_2 venendo distinto entro i ν analoghi da una radice ν^{esima}), le due funzioni X_1' e X_2' riuscirebbero identiche e riuscirebbero quindi simili, rispetto al numero ν, i due gruppi di contatto di ψ_1 e ψ_2.

Si conclude che la *condizione di irriducibilità della curva* K *data dalla* (2) *è che siano anzitutto irriducibili le* K_1 *e* K_2 *cicliche* (caso già considerato) *e che le terne di contatto di* ψ_1 *e* ψ_2 *non siano simili rispetto ad alcun numero* ν *divisore di* ν_2 (e di ν_1).

Dopo di ciò vediamo le condizioni di identità per le funzioni X. Supponiamo anzitutto per semplicità che ν_1, in generale multiplo di ν_2 ($\nu_1 = \varrho\nu_2$), sia ad esso eguale ($\nu_1 = \nu_2$, $\varrho = 1$). In questo caso si ottiene una sola famiglia di curve K. Infatti le sostituzioni α e β, il cui periodo è divisore di ν_1, per generare tutto il G d'ordine $\nu_1\,\nu_2 = \nu_1^2$, devono avere il periodo ν_1 ed essere indipendenti. E poichè due coppie di operazioni α e β, α' e β' indipendenti e di egual periodo sono sempre trasformate l'una nell'altra mediante una conveniente τ, segue l'asserto. (Il quale asserto è d'accordo col fatto che sopra una curva ellittica vi è una sola $\gamma^1_{\nu^2}$ ellittica e che questa risulta identica alla curva stessa).

Per passare al caso generale ($\nu_1 = \varrho\nu_2$, $\varrho > 1$) si osservi che in questo la K è ottenuta estraendo una radice ϱ^{esima} sulla $\overline{K}$ data da

$$\overline{X} = \sqrt[\nu_2]{\psi_1(xy)} + \sqrt[\nu_2]{\psi_2(xy)}$$

o anche estraendo separatamente due radici d'ordine ν_2 sulla

$$\overline{X'} = \sqrt[\varrho]{\psi_1(xy)}\,;$$

poichè l'estrazione delle due radici $\nu_2{}^{\text{esime}}$ dà origine a una sola famiglia di curve, segue dal confronto dei due modi con cui è ottenibile una stessa K, che *le* K *birazionalmente distinte corrispondono alle varie terne di contatto della* ψ_1 *dissimili rispetto al numero* ϱ.