ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA NAZIONALE

DEI LINCEI

ANNO CCCXVIII.

1921

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXX.

2° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1921

Matematica. — *Sull'equazione delle vibrazioni trasversali di un'asta solida, elastica e omogenea.* Nota I del dott. FRANCESCO SBRANA, presentata dal Corrisp. TEDONE [1].

1. L'equazione indefinita delle vibrazioni trasversali di un'asta solida, elastica e omogenea, se si suppone di poter trascurare l'effetto prodotto, sulle vibrazioni, dal peso dell'asta stessa, si riduce facilmente alla seguente forma:

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \text{ [2]}. \tag{1}$$

L'equazione (1) ha diverse proprietà in comune colla nota equazione del calore. Come quest'ultima, infatti, essa è di tipo parabolico, ed ha per caratteristiche le rette $y =$ costante. Seguendo lo stesso procedimento, usato dal Volterra per l'equazione del calore [3], si può, anche per la (1), stabilire una formula analoga alla formula di Green, relativa all'equazione del potenziale. La difficoltà sostanziale consiste, com'è intuitivo, nel determinare la soluzione fondamentale della (1) [4], che a me è riuscito di ottenere sotto una forma notevolmente semplice, come mi propongo di mostrare brevemente in questa Nota.

2. Come per l'equazione del calore, anche per la (1) è agevole stabilire un teorema di unicità.

Consideriamo, nel piano xy, una linea aperta, $s(y_0)$, che abbia gli estremi, A e B, su una caratteristica $y = y_0$, col senso positivo che vada da A verso B, e tale, che le ordinate di tutti gli altri suoi punti siano inferiori ad y_0. Supporremo che ogni altra caratteristica, che incontri la linea, abbia con essa due soli punti in comune [5]. Si potrà allora decom-

[1] Pervenuta all'Accademia il 1° luglio 1921.

[2] Cfr. Kirchhoff, *Vorlesungen über Mechanik*, 1897, 29ste Vorles., § 6.

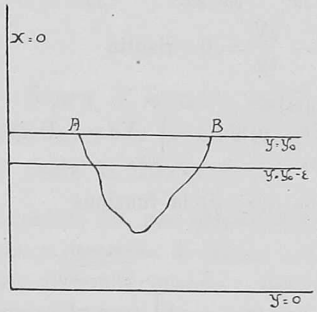
[3] *Leçons sur l'intégration des éq. diff. aux dérivées part.*, 1912, 10me leç.

[4] Per la ricerca della soluzione fondamentale delle equazioni paraboliche alle derivate parziali, di ordine superiore al secondo, ved. Block, *Arkiv för Math., Astron. o. Fysik*, Bd. 7, 8, 9.

[5] Si deve eccettuare, tra esse, quella di ordinata minima, che avrà comune colla curva un sol punto. Le considerazioni che seguono valgono però anche se la curva contiene un tratto di caratteristica $y = k$, dove k sia una costante, inferiore alle ordinate di tutti gli altri punti di $s(y_0)$, e se la curva si estende all'infinito, purchè si introducano convenienti ipotesi sul comportamento all'infinito della funzione u.

porre la linea in due rami, rappresentabili mediante le equazioni:

$$x = \xi_1(y) \ , \ x = \xi_2(y) \ , \ [\xi_1(y) < \xi_2(y)] \ .$$



Nella regione finita $S(y_0)$, limitata da $s(y_0)$, e dalla caratteristica $y = y_0$, sia u una soluzione regolare della (1). Intendiamo per tale una soluzione che abbia le derivate $\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y}$, $\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}$, finite e continue, e le derivate $\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$, integrabili in $S(y_0)$. Moltiplicando la (1) per $\frac{\partial u}{\partial y}$, e posto:

$$P(x, y) = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \ , \ Q(x, y) = \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right\},$$

si ha: $\frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial Q}{\partial y} = 0$. Risulta quindi:

$$\int_{\xi_1(y_0)}^{\xi_2(y_0)} Q(x, y_0)\, dx - \int_{s(y_0)} (Q\, dx + P\, dy) = 0 \, .$$

Supponiamo ora su $s(y_0)$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial y} = 0$. Sarà allora pure, su $s(y_0)$, $P = Q = 0$; e, perciò, $Q = 0$, cioè $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial y} = 0$, lungo il segmento AB, come lungo ogni altro segmento di caratteristica che abbia gli estremi in $s(y_0)$. Per conseguenza, u risulterà, in $S(y_0)$, una funzione lineare, a coefficienti costanti, della x. Se poi si aggiunge l'ipotesi che u e $\frac{\partial u}{\partial x}$ si annullino in un punto di $S(y_0)$, o del suo contorno, la funzione u stessa sarà nulla in tutta la regione $S(y_0)$. Al modo solito, concludiamo subito, da quanto precede, che una soluzione u di (1) è determinata dai valori che assumono $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, su $s(y_0)$, e u, $\frac{\partial u}{\partial x}$, in un punto di $S(y_0)$, o del suo contorno.

3. Si riconosce subito che la (1) è *autoaggiunta*. Se u ed α sono soluzioni regolari di (1), in $S(y_0)$, posto:

$$U(x, y) = \frac{\partial^3 \alpha}{\partial x^3} u - \frac{\partial^2 \alpha}{\partial x^2} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \alpha}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \alpha \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}, \quad V(x, y) = \alpha \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial \alpha}{\partial y} u,$$

avendosi, in $S(y_0)$, $\frac{\partial U}{\partial x} - \frac{\partial V}{\partial y} = 0$: risulta

$$\int_{\xi_1(y_0)}^{\xi_2(y_0)} V(x, y_0) dx = \int_{s(y_0)} (V dx + U dy). \tag{2}$$

Sceglieremo come funzione $\alpha(x, y)$ la funzione

$$\alpha(x, y; x_0, y_0) = (x_0 - x) \int_0^{\frac{x_0 - x}{2\sqrt{y_0 - y}}} (\operatorname{sen} \varphi^2 - \cos \varphi^2)\, d\varphi + \tag{3}$$
$$+ \sqrt{y_0 - y} \left(\operatorname{sen} \frac{(x_0 - x)^2}{4(y_0 - y)} + \cos \frac{(x_0 - x)^2}{4(y_0 - y)} \right), (y_0 > y),$$

(ove intendiamo che il radicale sia preso positivamente), la quale sodisfa alla (1) come funzione di x, y, e di x_0, y_0. Con questa scelta, la (2) non è più applicabile nella regione $S(y_0)$, a causa della singolarità che presentano, per $y = y_0$, α e le sue derivate. Però essa è applicabile in ogni regione $S(y_0 - \varepsilon)$, corrispondente a una caratteristica $y = y_0 - \varepsilon$, $(\varepsilon > 0)$, che incontri $s(y_0)$. Avremo, in questa ipotesi,

$$\int_{\xi_1(y_0 - \varepsilon)}^{\xi_2(y_0 - \varepsilon)} \left(\alpha \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial \alpha}{\partial y} u \right)_{y = y_0 - \varepsilon} dx = \int_{s(y_0 - \varepsilon)} (V dx + U dy). \tag{4}$$

Facciamo ora tendere ε a zero, supponendo il punto $0 \equiv (x_0, y_0)$, *interno* al segmento AB. Troviamo così, facilmente [1],

$$\lim_{\varepsilon = 0} \int_{\xi_1(y_0 - \varepsilon)}^{\xi_2(y_0 - \varepsilon)} \left(\frac{d\alpha}{\partial y} u \right)_{y = y_0 - \varepsilon} dx = -\sqrt{2\pi}\, u(x_0, y_0); \lim_{\varepsilon = 0} \int_{\xi_1(y_0 - \varepsilon)}^{\xi_2(y_0 - \varepsilon)} \left(\alpha \frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y = y_0 - \varepsilon} dx = 0, \tag{5}$$

per cui,

$$\sqrt{2\pi}\, u(x_0, y_0) = \lim_{\varepsilon = 0} \int_{s(y_0 - \varepsilon)} (V dx + U dy). \tag{6}$$

[1] Per ciò conviene tener presenti le note formule:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{sen} \varphi^2 d\varphi = \int_{-\infty}^{+\infty} \cos \varphi^2 d\varphi = \sqrt{\frac{\pi}{2}};$$

cfr., p. es., Riemann-Weber, *Part. Diff.-Gleich. der math. Physik*, 1er Bd., (1910), § 15 form. (15).