ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA NAZIONALE

DEI LINCEI

ANNO CCCXVIII.

1921

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXX.

2° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1921

Matematica. — *Sopra il numero delle classi di forme aritmetiche definite di Hermite.* — Nota I del dott. ALBERTO BEDARIDA, presentata dal Socio L. BIANCHI (1).

1. *Generalità.* Il Lipschitz (2), con procedimenti di Aritmetica pura, ha determinato, per le forme aritmetiche di Gauss e di Dirichlet, le relazioni tra i numeri delle classi di forme, quando i determinanti differiscano per un fattore quadrato. Come è noto, si trova, per tali forme, che uno dei due numeri è sempre un divisore dell'altro.

Noi ci siamo proposti di applicare tali procedimenti alle forme aritmetiche di Hermite (3), appartenenti al campo di Gauss, o corpo $K(\sqrt{-1})$; cioè alle forme del tipo:

$$f \equiv (a, b, c) \equiv axx_0 + bxy_0 + b_0x_0y + cyy_0 , \tag{1}$$

ove a e c sono interi razionali, b e b_0 interi complessi coniugati di Gauss, x, y le variabili appartenenti a questo campo, x_0, y_0 le loro coniugate. L'espressione $\Delta = bb_0 - ac$ è il determinante delle forme (1).

In questa Nota ci occuperemo delle forme di Hermite *definite* ($\Delta < 0$); e diremo subito che, per le forme in considerazione, si penetra più profondamente nel metodo del Lipschitz e ciò con sviluppi più ampi e più vari.

Per le forme aritmetiche definite di Hermite (primitive) (4) non si giunge alla medesima conclusione osservata per le forme aritmetiche di Gauss e di Dirichlet; ma, precisamente: se $\Delta' = \Delta p^2$ oppure $\Delta' = \Delta \pi \pi_0 = \Delta q$ (esclusi i casi particolari $\Delta = -1, -2, -3$), ove p è un numero primo razionale nel campo di Gauss ($p \equiv 3 \pmod 4$) e π è un numero primo complesso in questo campo (q primo nel campo dei numeri interi razionali, $\equiv 1 \pmod 4$ oppure $q = 2$), il numero delle classi di forme

(1) Pervenuta all'Accademia il 24 giugno 1921.

(2) Lipschitz, Crelle's Journal, 53, 54 Bdd.

(3) Hermite, Oeuvres, tom. I, pag. 235 e seg.; oppure Crelle's Journal, 47 Bd.

(4) Una forma del tipo (1), di Hermite, si dirà primitiva, quando gli interi a, b, b_0, c non hanno in comune alcun fattore intero razionale. Una forma primitiva si dirà di prima o di seconda specie secondo che dei coefficienti a e c uno almeno è dispari oppure no. Per l'esistenza delle forme primitive di seconda specie deve aversi $\Delta \equiv 1 \pmod 4$, oppure $\Delta \equiv 2 \pmod 4$.

aritmetiche definite di Hermite, a determinante Δ', è sempre una *combinazione lineare, intera, omogenea, a coefficienti interi razionali*, di due oppure tre numeri delle classi di due, oppure tre, ben determinati insiemi di classi di forme aritmetiche definite di Hermite, a determinante Δ, secondo che si tratta di forme primitive di prima oppure di seconda specie.

Queste relazioni si estendono al caso di un intero composto (razionale o complesso di Gauss).

La ragione di questa differenza di risultati riposa sul fatto che i procedimenti del Lipschitz sono intimamente legati alla considerazione del gruppo automorfo aritmetico delle forme; gruppo che per le forme di Gauss e di Dirichlet è perfettamente determinato dal determinante delle forme, mentre per le forme (definite) di Hermite il determinante non definisce completamente il tipo del gruppo automorfo aritmetico.

L'equivalenza aritmetica delle nostre forme sarà l'equivalenza aritmetica propria, cioè quella rispetto al gruppo delle sostituzioni $\begin{pmatrix}\alpha, \beta\\ \gamma, \delta\end{pmatrix}$ ove α, β, γ e δ sono interi di Gauss, tali che $\alpha\delta - \beta\gamma = +1$.

2. *Proposizioni fondamentali.* La ricerca si fonda sopra le seguenti proposizioni. Per brevità, escluderemo il caso $\pi = 1 + i$. Si ha:

Data una forma di Hermite [1] *(definita od indefinita),* $f' \equiv (a', b', c')$, *a determinante* $\Delta\mu\mu_0$ *ove* μ *è un numero primo nel corpo* $K(\sqrt{-1})$, *primitiva di prima o di seconda specie, esistono sempre forme di Hermite (definite od indefinite), a determinante* Δ, *rispettivamente primitive di prima o di seconda specie, che, con sostituzioni aritmetiche a modulo* μ, *si trasformano nella forma considerata* f'. *Tali forme costituiscono una ed una sola classe.*

Di qui segue:

Tra le classi di forme di Hermite (definite od indefinite), a determinante Δ, *primitive di prima o di seconda specie, e le classi di forme (definite od indefinite) di Hermite, a determinante* $\Delta\mu\mu_0$, *rispettivamente primitive di prima o di seconda specie, è stabilita una corrispondenza, in modo che ad una classe di forme a determinante* Δ, *primitive di prima o di seconda specie, corrispondono* $n(n \geq 1)$ *classi di forme a determinante* $\Delta\mu\mu_0$, *rispettivamente primitive di prima e di seconda specie, e, viceversa, ad una classe di queste corrisponde, rispettivamente, una ed una sola classe delle prime.*

Le forme di Hermite siano ora *definite* ($\Delta < 0$) e, ad es., positive. È noto [2] che il loro gruppo automorfo aritmetico è un gruppo finito.

[1] Tacitamente intendiamo che le forme di Hermite che si considerano siano aritmetiche ed appartenenti al corpo $K(\sqrt{-1})$.

[2] Bianchi: Math. Ann., 38 Bd.

Escludendo i casi $\Delta = -1, -2, -3$, si ha: *le forme aritmetiche definite di Hermite, primitive di prima specie, hanno per gruppo automorfo aritmetico unicamente gruppi degli ordini 2 e 4; quelle di seconda specie possono avere gruppi anche di ordine 6*.

Inoltre si ha:

I valori del numero n dipendono, unicamente, dal determinante Δ, dal numero primo μ e dall'ordine dei gruppi automorfi aritmetici delle forme a determinante Δ, appartenenti alla classe che si considera.

Fisica. — *Sul potenziale di risonanza e di ionizzazione nei vapori misti di sodio e di potassio con mercurio* [1]. Nota I di Adolfo Campetti, presentata dal Socio Andrea Naccari [2].

1°) In una Nota precedente, pubblicata nei Rendiconti di questa Accademia [3], esaminai il comportamento di una miscela di vapori di potassio e sodio rispetto al potenziale di ionizzazione e di risonanza, rilevando come quest'ultimo risulti di qualche poco aumentato per ognuno dei due vapori metallici, quando sono presenti vapori dell'altro. Effettivamente, in quelle condizioni di esperienza, dato l'uguale riscaldamento dei due metalli e la notevole differenza delle loro tensioni di vapore ad una stessa temperatura, nella camera di ionizzazione era presente, in ogni esperienza, uno solo dei due vapori in misura notevole, figurando l'altro solo in piccola quantità.

Intanto, circa contemporaneamente, Horton e Bailey [4] pubblicavano un interessante lavoro sull'effetto di una traccia di impurità (dovuta a vapori di mercurio) nelle misure della velocità di ionizzazione per gli elettroni nell'elio, per il quale gas, secondo precedenti ricerche dello stesso Horton [5] e di Goucher [6], tra loro in abbastanza buon accordo. era stato trovato essere circa 20,4 Volt il potenziale di prima eccitazione o risonanza e 25,5 Volt circa quello di ionizzazione.

Nelle esperienze ora citate di Horton e Bailey l'impurità è dovuta a mercurio, il quale agisce anche in quantità minima; avendosi per la sua presenza traccie di ionizzazione già a circa 21 Volt e riconoscendosi a questo potenziale nella luminosità presentata dal gas la linea del mercurio $\lambda = 4359$ Å, ma nessuna dell'elio; l'emissione dell'elio si inizia solo al disopra di 25 Volt. Siccome il potenziale di risonanza dell'elio è di circa 20 Volt,

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Fisica della R. Università di Sassari.
(2) Pervenuta all'Accademia il 1° settembre 1921.
(3) Rend. Lincei, vol. XXIX, 1920, 2° semestre.
(4) Phil. Mag., vol. 40, n. 238, 1920.
(5) Proc. Roy. Soc. 1919.
(6) Proc. Phys. Soc. of London, 1920.