# ATTI

DELLA

# REALE ACCADEMIA NAZIONALE

# DEI LINCEI

ANNO CCCXVIII.

1921

---

SERIE QUINTA

---

## RENDICONTI

---

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

---

**VOLUME XXX.**

2° Semestre.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1921

Matematica. — *Sui numeri reali e le grandezze.* Nota II di C. Burali-Forti, presentata dal Corrisp. R. Marcolongo (*).

**3.** Se $u, v$ sono classi di grandezze, omogenee rispetto alle operazioni $h, k$, inoltre $m, n$ sono elementi, non nulli, il primo di $u$ e il secondo di $v$, consideriamo la ordinaria *proporzionalità* tra gli $u$ e i $v$ che a $0_{u,h}$ ed $m$ fa corrispondere $0_{v,k}$ ed $n$ e alla somma $(h)$ di due elementi di $u$ fa corrispondere la somma $(k)$ dei due corrispondenti di $v$. Tale proporzionalità resta individuata da un Ops $(u, v)$, che risulta essere reciproco [pag. 178], e che indicheremo col simbolo completo $p\begin{pmatrix} u, h, m \\ v, k, n \end{pmatrix}$: vale a dire porremo,

$$(1) \qquad h, k \,\varepsilon\, \mathrm{Oper}\,.\, u \,\varepsilon\, \mathrm{Grand}\, h \,.\, v \,\varepsilon\, \mathrm{Grand}\, k \,.\, m \,\varepsilon\, u - \iota 0_{u,h} \,.\, n \,\varepsilon\, v - \iota 0_{v,k} :$$

$$\supset_{h,k,u,v,m,n} : p\begin{pmatrix} u, h \,.\, m \\ v, k, n \end{pmatrix} . = . \text{℩} \,[\mathrm{Ops}\,(u, v) \cap f \ni \{ f 0_{u,h} = 0_{v,k} \,.\, fm = n :$$

$$x, y \,\varepsilon\, u \,.\, \supset_{x,y} .\, f(xhy) = (fx)\, k\, (fy) \}].$$

Si dimostra facilmente (7), ed è ben noto, che la classe entro [ ] è una $\mathrm{Cls}_1$ [pag. 70] e quindi la proporzionalità considerata esiste ed è univocamente determinata. Risulta pure che

$$(2) \qquad \mathrm{Hp}\,(1) \,.\, \supset_{h,k,u,v,m,n} .\; p\begin{pmatrix} u, h, m \\ v, k, n \end{pmatrix} \varepsilon\, \mathrm{Ops\ Rcp}\,(u, v)$$

$$(3) \qquad \mathrm{Hp}\,(1) \,.\, \supset_{h,k,u,v,m,n} .\; \left\{ p\begin{pmatrix} u, h, m \\ v, k, n \end{pmatrix} \right\}^{-1} = p\begin{pmatrix} v, k, n \\ u, h, m \end{pmatrix}$$

e che per $u = v, h = k, m = n$ la proporzionalità è una *identità*.

**4.** Conviene indicare con un simbolo speciale la proporzionalità (cfr. n. 2, (3)) che allo *zero* ed *uno* di $Q_0(u, h)$ fa corrispondere lo *zero* ed *uno* di $Q_0(v, k)$. Si porrà

$$(1) \qquad h, k \,\varepsilon\, \mathrm{Oper.}\; u \,\varepsilon\, \mathrm{Grand}\, h \,.\, v \,\varepsilon\, \mathrm{Grand}\, k : \supset_{h,k,u,v} :$$

$$p_{u,h,v,k} . = . p\begin{pmatrix} Q_0(u, h), h, 1_{u.h} \\ Q_0(v, k), k, 1_{v,k} \end{pmatrix}.$$

Si può ora definire la classe *assoluta*, $Q_0$, dei *numeri reali* ponendo

$$(2) \qquad Q_0 . = . \mathrm{Ops} \cap x \ni [h \,\varepsilon\, \mathrm{Oper.}\; u \,\varepsilon\, \mathrm{Grand}\, h \,.\, \supset_{h,u}$$

$$\exists\, Q_0(u, h) \cap a \ni \{k \,\varepsilon\, \mathrm{Oper.}\; v \,\varepsilon\, \mathrm{Grand}\, k \,.\, \supset_{k,v} .\, x(v; k) = p_{u,h,v,k}\, a\}]$$

(*) Presentata nella seduta del 2 gennaio 1921.

(7) C. Burali-Forti, *Teoria delle Grandezze* [Formulaire de Mathématiques, T. I, pp. 28-57; Rivista di Matematica, vol. III, pp. 76-101 (1893)].

e ogni $Q_0$ risulta essere Ops per coppie $(v\,;k)$ tali che $k$ è operazione e $v$ è classe di grandezza omogenea rispetto a $k$.

Si definisce la somma, $+$, per i $Q_0$ assoluti ponendo

(3) $$x\,,y\,\varepsilon\,Q_0 : \supset_{x,y} : x+y \,.=.\, \iota\,[Q_0 \cap z \ni \{h\,\varepsilon\,\text{Oper}.\; u\,\varepsilon\,\text{Grand}\;h \,.\, \supset_{h,u} .\; z\,(u\,;h) = x\,(u\,;h) +_{u,h} y\,(u\,;h)\}]$$

(perchè $p_{u,h,u,h}$ è una identità) e risulta

(4) $$Q_0\,\varepsilon\,\text{Grand}\,+.$$

Si possono definire lo *zero*, 0, e l'*unità*, 1, assoluti di $Q_0$ ponendo

(5) $$0 \,.=.\, \iota\,[Q_0 \cap x \ni \{h\,\varepsilon\,\text{Oper}\quad v\,\varepsilon\,\text{Grand}\;h \,.\supset_{h,u} .\; x\,(u\,,h) = 0'_{u,h}\}]$$

(6) $$1 \,.=.\, \iota\,[\,.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; 1_{u,h}\ldots].$$

In modo ovvio si ottengono le classi assolute $N_0\,,R_0$ degli *interi* e dei *razionali*, insieme ai simboli assoluti 2, 3, ..., e loro derivati, con i quali si esprimono i $Q_0$. È chiaro che

(7) $$h\,\varepsilon\,\text{Oper}\,.\,u\,\varepsilon\,\text{Grand}\;h \,.\supset_{h,u} .\; Q_0\,(u\,,h) = x\,(u\,;h) \mid x\,\text{'}Q_0$$

cioè da ogni simbolo fisso, $x$, indicante un particolare $Q_0$ assoluto, si ottiene il $Q_0\,(u,h)$ corrispondente con la notazione $x\,(u\,;h)$, e ciò per ogni $x$ di $Q_0$ (8). Inoltre si ha ovviamente

(8) $$\text{Hp}\,(7).\; x\,,y\,\varepsilon\,Q_0 \,.\supset_{h,u,x,y} .\; x\,(u\,;h) +_{u,h} y\,(u\,;h) = (x+y)\,(u\,;h).$$

Il prodotto, $\times$, per i $Q_0$ assoluti si definisce così. Si definisca, come d'uso [pag. 169], $x\times y$ quando $x\,,y\,\varepsilon\,N_0$, indi quando $x\,,y\,\varepsilon\,R_0$ non entrambi $N_0$, infine quando $x\,,y\,\varepsilon\,Q_0$ non entrambi $R_0$ ponendo $x\times y = \text{l}'(a\times b)$ ove $a\,,b$ sono classi di $R_0$ tali che $x=\text{l}'\,a\,,\; y=\text{l}'\,b$. Si avranno per il *prodotto*, $\times$, le ordinarie proprietà e potrà esser definito il *quoto*, $/$, pure con gli ordinari metodi. La teoria dei $Q_0$ assoluti è così stabilita (9).

Giova osservare che i $Q_0$, definiti dalla (2) non sono Ops $(u\,\text{:}\,u\,,u)$, ove $u$ è Grand $h$ generica, e neanche è possibile (cfr. (8)) assegnare ad essi, con definizione, tale proprietà per seguire l'uso comune secondo il quale si scrive semplicemente $x\,a$ al posto di $x\,(u\,;h)\,a$ ove $x\,\varepsilon\,Q_0$ e $a\,\varepsilon\,u$ (10).

(8) Gli elementi, ad es., di $N_0\,(u\,,h)$ sono indicati da

(a) $$0\,(u\,;h)\;,\;1\,(u\,;h)\;,\;2\,(u\,;h)\;,\;3\,(u\,;h)\,,\ldots..$$

Per le classi ${}_1C\,,C_1$ (cfr. (4)) s'ha, ad es.,

$$2\,({}_1C\,;h)\,(1\,;1) = (1\,;2)\;,\;2\,(C_1\,;k)\,(1\,;1) = (2\,;1)\,,$$

il che prova che nelle (*a*) *non* si possono sopprimere $u\,,h$ perchè altrimenti si avrebbe $2\,(1\,;1) = (1\,;2)\;,\;2\,(1\,;1) = (2\,;1)$, il che è un assurdo essendo $(1\,;2) \mathrel{-}= (2\,;1)$ (cfr. (2)).

(9) La (2) dà i $Q_0$ assoluti in modo diverso, più semplice e rigoroso, di quello seguito nella Nota del 1915 (cfr. (1)).

(10) Se $x\,,y\,\varepsilon\,Q_0$ si potrà scrivere, seguendo l'uso comune, $xy$ al posto di $x\times y$, ma solo come notazione *abbreviata* e non come notazione *effettiva*, altrimenti ogni $Q_0$

5. Dalle precedenti osservazioni risulta che il simbolo Grd [pag. 381, (5)] è privo di alcune delle proprietà che nelle pp. 381-409 di L. M. gli sono state attribuite. Ecco i cambiamenti generici che occorre fare.

*a*) Volendo, come è opportuno, mantenere a Grd il significato di « grandezza omogenea *assoluta* », a pag. 381 si cambi (5) e Grd in (5′) e Grd′ « grandezza omogenea *relativa* ad una operazione ». Le classi ${}_1C$, $C_1$, F, G (cfr. [4]), $Q_0$, $+Q_0$ sono delle Grd′.

*b*) Le ordinarie grandezze *geometriche* (lunghezza, ...), o *fisico-meccaniche* (massa, lavoro, ...) sono enti per i quali è stabilita a *priori* la *condizione di uguaglianza* e la operazione *somma*, dipendenti *soltanto* da proprietà geometrico-fisico-meccaniche e non dalla particolare definizione nominale ($\equiv$) di esse [pp. 298-311]; esse, peraltro, si definiscono [pag. 298 e seg.] nominalmente insieme alla somma. — Queste classi di grandezze, insieme alla relativa operazione somma (cfr. [1]) formano appunto la classe Grd « grandezza omogenea *assoluta* » che interessa introdurre e che *riteniamo definita* dalle condizioni sopra esposte. Una definizione nominale ($\equiv$) di Grd, simbolica, è possibile ma presenta alcune difficoltà formali che ora non intendiamo affrontare. Ci basti per ora ritenere che se $u, v\,\varepsilon$ Grd aventi a comune almeno un elemento, esse sono identiche. Inoltre se $u\,\varepsilon$ Grd è da considerarsi *una sola* operazione *somma* che, senza inconvenienti formali, può essere indicata con l'*unico* simbolo $+$.

*c*) Stabilito quanto è indicato in *b*), segue che la definizione di $Q_0$ [pag. 388] vien sostituita dalla (2) del n 4 di questa Nota; ma, lo si noti, i $Q_0$ si ottengono sempre dalle grandezze e gli $N_0$, $R_0$ come casi particolari dei $Q_0$. — La definizione euclidea dei $Q_0$ [pp. 399-406] si cambierà nella definizione dei $Q_0\ (u, h)$, sostituendo a Grd il nuovo simbolo Grd′ (cfr. *a*), ponendo esplicita la ipotesi $h\,\varepsilon$ Oper, $u\,\varepsilon$ Grand $h$ e conservando ovunque gli indici $u, h$ come nelle (1) (2) (3) delle pp. 400, 401 di L. M. — Il teorema di pag. 406, n. 1, L. M. è implicitamante contenuto nella definizione, *b*), di Grd. — Ecc.

*d*) Se $u\,\varepsilon$ Grd, $a\,\varepsilon\,u$, $x\,\varepsilon\,Q_0$, si può, per seguire l'uso comune, porre $x\,a \equiv x\,(u, +)\,a$ e dopo ciò i $Q_0$ assoluti risultano Ops per gli $u$ qualunque sia la classe $u$ appartenente a Grd; notando che $Q_0 - \varepsilon$ Grd. — Poste ancora le (6), (7) di pag. 381, L. M., col nuovo significato di Grd, e se $x\,\varepsilon$ grd $-$ Zero, allora $Q_0\,x$ indica (cfr. n. 1) una sola classe di Grd e precisamente « grandezza omogenea con $x$ ». — Ecc.

---

sarebbe Ops e Opd per i $Q_0$ (cfr. n. 1, [6]). — Inoltre se ai $Q_0$ si assegnasse la proprietà di essere Ops $(u \,!\, u, u)$ si avrebbe, ad es, (cfr. [2]), considerando i $+Q_0$,

$$3 + 5 = 8 \text{ e anche } 3 + 5 = 3\,(+5) = +15,$$

e si avrebbe così un assurdo.