ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA NAZIONALE
DEI LINCEI

ANNO CCCXVIII.

1921

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXX.

2° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1921

MEMORIE E NOTE PRESENTATE DA SOCI

Matematica. — *Sopra alcuni sviluppi in serie.* Nota I di Pia Nalli, presentata dal Corrisp. Giuseppe Bagnera [1].

In una Nota recente [2] ho accennato alla rappresentazione di una funzione in serie di funzioni fondamentali dell'operazione

$$S[u(x)] = g(x)\, u(\alpha x) + \int_0^x N(x, s)\, u(s)\, ds + \int_0^{\alpha x} P(x, s)\, u(s)\, ds \quad (0 < \alpha < 1)$$

ed ho detto che tali serie sono più da assimilarsi a generalizzazioni di serie di potenze anzichè a generalizzazioni di serie di Fourier.

Mi propongo di avvalorare la mia asserzione con un esempio particolare.

1. Consideriamo la particolare operazione

$$S[u(x)] = u(\alpha x) + \int_0^{\alpha x} u(s)\, ds\,.$$

Essa ammette le funzioni fondamentali $u_0(x)\,, u_1(x)\,, u_2(x)\,, \ldots$ corrispondenti alle costanti caratteristiche $1\,, \frac{1}{\alpha}\,, \frac{1}{\alpha^2}\,, \ldots$, e cioè si ha in generale

$$\alpha^n\, u_n(x) = u_n(\alpha x) + \int_0^{\alpha x} u_n(s)\, ds\,. \tag{1}$$

La $u_n(x)$ si annulla per $x = 0$ insieme con le sue prime $n-1$ derivate ed è determinata a meno di una costante moltiplicativa, che fisseremo in modo che la derivata n^{esima} di $u_n(x)$ prenda il valore $n!$ per $x = 0$.

Dalla (1), derivando e dividendo per α, troviamo

$$\alpha^{n-1}\, u'_n(x) = u'_n(\alpha x) + \int_0^{\alpha x} u'_n(s)\, ds\,,$$

quindi $u'_n(x)$ è il prodotto di $u_{n-1}(x)$ per una costante, e siccome per $x = 0$ la derivata $(n-1)^{\text{ma}}$ di $u'_n(x)$ prende il valore $n!$ abbiamo

$$u'_n(x) = n\, u_{n-1}(x)\,. \tag{1'}$$

(1) Pervenuta all'Accademia il 9 settembre 1921.

(2) *Sopra un'equazione funzionale,* Nota II. Questi Rendiconti, 2° sem. 1920.

Servendoci di questa relazione possiamo trovare lo sviluppo di $u_n(x)$ in serie di potenze di x quando sia noto quello di $u_0(x)$. Quest'ultimo si ottiene facilmente dalla (1) per $n=0$. Ponendo $u_0(x)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n x_n$, prenderemo $c_0=1$ e per $n>0$ si dovrà avere

$$c_n = c_n \alpha^n + \frac{c_{n-1}}{n} \alpha^n,$$

come risulta dalla (1) eguagliando i coefficienti delle stesse potenze di x nei due membri; quindi

$$c_n = \frac{1}{n!} \frac{\alpha^{\frac{n(n+1)}{2}}}{(1-\alpha)(1-\alpha^2)\dots(1-\alpha^n)}.$$

Dunque, l'espressione generale di $u_m(x)$ è la seguente funzione intera di x:

$$u_m(x) = \sum_{n=m}^{\infty} \frac{\alpha^{\frac{(n-m)(n-m+1)}{2}}}{(1-\alpha)(1-\alpha^2)\dots(1-\alpha^{n-m})} \cdot \frac{x^n}{n!}.$$

Ciò si vede integrando successivamente $u_0(x)$ tra i limiti $(0, x)$ in base alla (1′).

Per $\alpha=0$, $u_m(x)$ si riduce ad x^m.

2. Supponiamo che una funzione $f(x)$ analitica regolare nelle vicinanze del punto $x=0$, si possa sviluppare intorno a questo punto in una serie uniformemente convergente di funzioni u, cioè mettere sotto la forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n u_n(x).$$

Si può esprimere facilmente il coefficiente a_n per mezzo dei valori che prendono la funzione $f(x)$ e le sue prime n derivate nel punto $x=0$. Dimostreremo che si ha;

$$a_n = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{\alpha^k}{(1-\alpha)(1-\alpha^2)\dots(1-\alpha^k)} f^{(n-k)}(0). \tag{2}$$

Intanto la formola è vera per $n=0$, perchè $f(0)=a_0$, e per $n=1$, perchè

$$f'(x) = a_0 u_0'(x) + a_1 u_0(x) + 2a_2 u_1(x) + \cdots$$

e perciò $f'(0) = a_0 u_0'(0) + a_1$, ed essendo $u_0'(0) = \dfrac{\alpha}{1-\alpha}$, è

$$a_1 = f'(0) - \frac{\alpha}{1-\alpha} f(0).$$

Ammettiamo vera la (2) fino ad a_n e dimostriamola per a_{n+1}.

Derivando $f(x)$ $n+1$ volte, troviamo:

$$f^{(n+1)}(x) = a_0\, u_0^{(n+1)}(x) + a_1\, u_0^{(n)}(x) + 2\,!\, a_2\, u_0^{(n-1)}(x) + \cdots$$

$$\cdots + (n+1)\,!\, a_{n+1}\, u_0(x) + (n+2)\,!\left(a_{n+2}\, u_1(x) + a_{n+3}\,\frac{u_2(x)}{2\,!} + \cdots\right),$$

e per $x = 0$:

$$f^{(n+1)}(0) = a_0\, u_0^{(n+1)}(0) + a_1\, u_0^{(n)}(0) + \cdots + (n+1)\,!\, a_{n+1}. \tag{3}$$

Tenendo conto delle espressioni di $a_0, a_1, \ldots a_n$, cerchiamo il coefficiente di $f^k(0)$ $(k \leq n)$ nella somma dei primi $n+1$ termini del secondo membro della (3). Esso è

$$\sum_{r=0}^{n-k}(-1)^r\,\frac{\alpha^r}{(1-\alpha)(1-\alpha^2)\ldots(1-\alpha^r)}\,u_0^{(n-k-r+1)}(0). \tag{4}$$

Per $k \geq 1$, aggiungendo a questa somma un altro termine dedotto da quello generale facendo $r = n-k+1$, *otteniamo il prodotto di* $(n-k+1)!$ *per il coefficiente di posto* $n-k+2$ *nello sviluppo di* $u_0(x)$ in serie di funzioni u, ed essendo tale coefficiente nullo, concludiamo che la somma (4) è eguale a

$$-(-1)^{n-k+1}\,\frac{\alpha^{n-k+1}}{(1-\alpha)(1-\alpha^2)\ldots(1-\alpha^{n-k+1})}. \tag{5}$$

Ora mostreremo che l'eguaglianza tra le due espressioni (4) e (5) sussiste anche per $k=0$; ossia, tenendo conto del valore $u_0^{(n-r+1)}(0)$, dimostreremo che la differenza tra (4) e (5), cioè

$$\sum_{r=0}^{n+1}(-1)^r\,\frac{\alpha^r}{(1-\alpha)(1-\alpha^2)\ldots(1-\alpha^r)}\cdot\frac{\alpha^{\frac{(n-r+1)(n-r+2)}{2}}}{(1-\alpha)(1-\alpha^2)\ldots(1-\alpha^{n-r+1})}$$

è nulla.

Se dividiamo tutto per α^{n+1}, l'identità da dimostrare si riduce alla seguente:

$$\sum_{r=0}^{n+1}(-1)^r\,\frac{1}{(1-\alpha)(1-\alpha^2)\ldots(1-\alpha)^r}\cdot\frac{\alpha^{\frac{(n-r)(n-r+1)}{2}}}{(1-\alpha)(1-\alpha^2)\ldots(1-\alpha^{n+r-1})} = 0.$$

Denotiamo il primo membro con A_{n+1}: per le ipotesi fatte è $A_n = 0$.

Per $r > 1$ decomponiamo il numeratore 1 del primo fattore del termine corrispondente in A_{n+1} nelle due parti $1-\alpha^r$ ed α^r; A_{n+1} si potrà allora decomporre in due somme: la prima è A_n ed è nulla, rimane

$$\sum_{r=0}^{n+1}(-1)^r \frac{\alpha^r}{(1-\alpha)\dots(1-\alpha^r)} \cdot \frac{\alpha^{\frac{(n-r)(n-r+1)}{2}}}{(1-\alpha)\dots(1-\alpha^{n-r+1})}\,.$$

Per $r \leq n$ il secondo fattore del termine generico di questa somma si può decomporre nella somma di queste due parti:

$$\frac{\alpha^{\frac{(n-r)(n-r+1)}{2}}}{(1-\alpha)\dots(1-\alpha^{n-r})}\,,\quad \frac{\alpha^{\frac{(n-r+1)(n-r+2)}{2}}}{(1-\alpha)\dots(1-\alpha^{n-r+1})}\,,$$

ed allora A_{n+1} si decompone in due parti: una è $A_n \alpha^n$ e l'altra $A_{n+1}\alpha^{n+1}$. Abbiamo così $A_{n+1} = A_{n+1}\alpha^{n+1}$, $A_{n+1} = 0$. Dalla (3) ricaviamo così

$$f^{(n+1)}(0) = -\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k+1}\frac{\alpha^{n-k+1}}{(1-\alpha)\dots(1-\alpha^{n-k+1})}f^{(k)}(0) + (n+1)!\,a_{n+1}\,,$$

cosicchè la (2) è vera anche per il coefficiente a_{n+1}.

3. In seguito sarà dimostrato che una funzione analitica regolare all'interno di un cerchio avente centro nell'origine si sviluppa in serie di funzioni u che converge uniformemente in qualunque regione *interna* al cerchio.

Avremo in particolare in tutto il piano, in base all'espressione di a_n per $f(x) = 1$:

$$1 = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{\alpha^n}{(1-\alpha)(1-\alpha^2)\dots(1-\alpha^n)} \cdot \frac{u_n(x)}{n!}\,, \tag{6}$$

e da questa, per derivazione, si ottiene lo sviluppo di $u_0'(x)$:

$$u_0'(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{\alpha^{n+1}}{(1-\alpha)\dots(1-\alpha^{n+1})} \cdot \frac{u_n(x)}{n!}\,. \tag{7}$$

Ed ora siamo in grado di dare una formola che presenta una grande analogia con quella di Maclaurin.

Sia $f(x)$ una funzione reale che ammetta derivate fino all'ordine n in ogni punto dell'intervallo $(0, x)$, $x > 0$.

Poniamo

$$f(x) = f(0)\,u_0(x) + \left[f'(0) - \frac{\alpha}{1-\alpha}f(0)\right]u_1(x) + \cdots \tag{8}$$

$$\cdots + \left[f^{(n-1)}(0) - \frac{\alpha}{1-\alpha}f^{(n-2)}(0) + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{\alpha^{n-1}}{(1-\alpha)\dots(1-\alpha^{n-1})}f(0)\right] \times$$

$$\times \frac{u_{n-1}(x)}{(n-1)!} + \frac{u_\nu(x)}{\nu}\,H(x)\,,$$

con ν intero positivo.

Si denoti con $F(z)$ la funzione che si ottiene cambiando nel secondo membro l'argomento x di ciascuna delle u in $x - z$, ed in z l'argomento o della f e delle sue derivate. Si ha $F(0) = F(x) = f(x)$, quindi la derivata di $F(z)$ si annulla in un punto ξ interno all'intervallo $(0, x)$.

Ora si trova facilmente

$$F'(z) = \left[f^{(n)}(z) - \frac{\alpha}{1-\alpha} f^{(n-1)}(z) + \cdots + (-1)^n \frac{\alpha^n}{(1-\alpha)\dots(1-\alpha)^n} f(z) \right] \times$$
$$\times \frac{u_{n-1}(x-z)}{(n-1)!} - u_{\nu-1}(x-z)\, H(x) - f(z)\, g_n(x-z),$$

dove con $g_n(x)$ denotiamo la somma dei termini dello sviluppo di $u_0'(x)$ a partire dall'$(n+1)^{mo}$.

Da $F'(\xi) = 0$ ricaviamo la seguente espressione per il resto $\frac{u_\nu(x)}{\nu} H(x)$ della formola (8)

$$\left[f^{(n)}(\xi) - \frac{\alpha}{1-\alpha} f^{(n-1)}(\xi) + \cdots + (-1)^n \frac{\alpha^n}{(1-\alpha)\dots(1-\alpha^n)} f(\xi) \right] \times$$
$$\times \frac{u_{n-1}(x-\xi)}{u_{\nu-1}(x-\xi)} \cdot \frac{u_\nu(x)}{\nu(n-1)!} + f(\xi) \frac{g_n(x-\xi)}{u_{\nu-1}(x-\xi)} \cdot \frac{u_\nu(x)}{\nu}.$$

Mostriamo che l'ultima parte di questo resto tende a zero al tendere di n ad ∞.

Si ha $u_m(x) > x^m$; poi, essendo

$$u_m(x) = m \int_0^x (x-\xi)^{m-1} u_0(\xi)\, d\xi$$

abbiamo $u_m(x) < x^m u_0(x)$, quindi

$$\left| \frac{g_n(x)}{u_{\nu-1}(x)} \right| < \frac{|g_n(x)|}{x^{\nu-1}}.$$

Ma

$$|g_n(x)| < \sum_{m=n}^{\infty} \frac{\alpha^{m+1}}{(1-\alpha)\dots(1-\alpha^{m+1})} \cdot \frac{u_m(x)}{m!} <$$
$$< u_0(x) \sum_{m=n}^{\infty} \frac{\alpha^{m+1}}{(1-\alpha)\dots(1-\alpha^{m+1})} \cdot \frac{x^m}{m!};$$

quindi

$$\left| \frac{g_n(x)}{u_{\nu-1}(x)} \right| < u_0(x) \sum_{m=n}^{\infty} \frac{\alpha^{m+1}}{(1-\alpha)\dots(1-\alpha^{m+1})} \cdot \frac{x^{m-\nu+1}}{m!}.$$

La diseguaglianza si rafforza se al primo membro si mette $x - \xi$ al posto di x; quindi

$$\left| \frac{g_n(x-\xi)}{u_{\nu-1}(x-\xi)} u_\nu(x) \right| < u_0^2(x) \sum_{m=n}^{\infty} \frac{\alpha^{m+1}}{(1-\alpha)\dots(1-\alpha^{m+1})} \cdot \frac{x^{m+1}}{m!}$$

ed il secondo membro tende a zero al tendere di n ad ∞.

Per $\nu = n$ si ha la seguente forma del resto:

$$\left[f^{(n)}(\xi) - \frac{\alpha}{1-\alpha} f^{(n-1)}(\xi) + \cdots (-1)^n \frac{\alpha^n}{(1-\alpha)\ldots(1-\alpha^n)} f(\xi)\right] \frac{u_n(x)}{n!} + \\ + f(\xi) \frac{g_n(x-\xi)}{u_{n-1}(x-\xi)} \cdot \frac{u_n(x)}{n},$$

che è analoga a quella di Lagrange nella formola di Maclaurin.

Da essa deduciamo che se $f(x)$ ammette derivate di qualunque ordine ed $f^{(n)}(\xi)$ si mantiene limitata qualunque sieno n e ξ in $(0, x)$, $f(x)$ si può sviluppare in serie di funzioni $u(x)$, perchè il resto tende a zero. Infatti, il valore assoluto della prima parte del resto non supera

$$\mathrm{A}\, u_0(x) \left(1 + \frac{\alpha}{1-\alpha} + \cdots + \frac{\alpha^n}{(1-\alpha)\ldots(1-\alpha)^n}\right) \frac{x^n}{n!} = \\ = \mathrm{A}\, u_0(x) \frac{1}{(1-\alpha)\ldots(1-\alpha^n)} \frac{x^n}{n!}$$

con A costante, e quest'ultima espressione tende a zero al tendere di n ad ∞.

Così, p. es., troviamo subito lo sviluppo di e^{-x}:

$$e^{-x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(1-\alpha)\ldots(1-\alpha^n)} \cdot \frac{u_n(x)}{n!}. \tag{9}$$

Matematica. — *Sull'equazione delle vibrazioni trasversali di un'asta solida, elastica e omogenea.* Nota II del dott. FRANCESCO SBRANA, presentata dal Corrispondente O. TEDONE [1].

4. Per determinare il limite del secondo membro della (4), osserviamo che le funzioni α, $\frac{\partial \alpha}{\partial x}$, si annullano su tutta la caratteristica $y = y_0$, e quindi anche nei punti A e B, che $\frac{\partial^2 \alpha}{\partial x^2}$, $\frac{\partial \alpha}{\partial y}$, negli stessi punti, diventano infinite di ordine $\frac{1}{2}$, mentre $\frac{\partial^3 \alpha}{\partial x^3}$ ha un infinito di ordine $\frac{3}{2}$. La ricerca del limite propostoci si riduce quindi alla ricerca del limite:

$$\lim_{\varepsilon=0} \int_{s(y_0-\varepsilon)} \frac{\partial^9 \alpha}{\partial x^3}\, u\, dy \,.\ [2]$$

[1] Pervenuta all'Accademia il 1° luglio 1921.

[2] È chiaro che l'esistenza di questo limite risulta senz'altro da quanto precede. Si noti che $\frac{\partial^3 \alpha}{\partial x^3}$ tende, in A e B, a infinito di ordine maggiore d'uno, cambiando però infinite volte di segno.