ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA NAZIONALE

DEI LINCEI

ANNO CCCXVIII.

1921

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXX.

2° Semestre.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1921

Per $\nu = n$ si ha la seguente forma del resto:

$$\left[f^{(n)}(\xi) - \frac{\alpha}{1-\alpha} f^{(n-1)}(\xi) + \cdots (-1)^n \frac{\alpha^n}{(1-\alpha)\ldots(1-\alpha^n)} f(\xi)\right] \frac{u_n(x)}{n!} +$$
$$+ f(\xi) \frac{g_n(x-\xi)}{u_{n-1}(x-\xi)} \cdot \frac{u_n(x)}{n},$$

che è analoga a quella di Lagrange nella formola di Maclaurin.

Da essa deduciamo che se $f(x)$ ammette derivate di qualunque ordine ed $f^{(n)}(\xi)$ si mantiene limitata qualunque sieno n e ξ in $(0, x)$, $f(x)$ si può sviluppare in serie di funzioni $u(x)$, perchè il resto tende a zero. Infatti, il valore assoluto della prima parte del resto non supera

$$A\, u_0(x) \left(1 + \frac{\alpha}{1-\alpha} + \cdots + \frac{\alpha^n}{(1-\alpha)\ldots(1-\alpha)^n}\right) \frac{x^n}{n!} =$$
$$= A\, u_0(x) \frac{1}{(1-\alpha)\ldots(1-\alpha^n)} \frac{x^n}{n!}$$

con A costante, e quest'ultima espressione tende a zero al tendere di n ad ∞. Così, p. es., troviamo subito lo sviluppo di e^{-x}:

$$e^{-x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(1-\alpha)\ldots(1-\alpha^n)} \cdot \frac{u_n(x)}{n!}. \tag{9}$$

Matematica. — *Sull'equazione delle vibrazioni trasversali di un'asta solida, elastica e omogenea.* Nota II del dott. Francesco Sbrana, presentata dal Corrispondente O. Tedone [1].

4. Per determinare il limite del secondo membro della (4), osserviamo che le funzioni α, $\frac{\partial \alpha}{\partial x}$, si annullano su tutta la caratteristica $y = y_0$, e quindi anche nei punti A e B, che $\frac{\partial^2 \alpha}{\partial x^2}$, $\frac{\partial \alpha}{\partial y}$, negli stessi punti, diventano infinite di ordine $\frac{1}{2}$, mentre $\frac{\partial^3 \alpha}{\partial x^3}$ ha un infinito di ordine $\frac{3}{2}$. La ricerca del limite propostoci si riduce quindi alla ricerca del limite:

$$\lim_{\varepsilon=0} \int_{s(y_0-\varepsilon)} \frac{\partial^9 \alpha}{\partial x^3} u\, dy. \text{ [2]}$$

[1] Pervenuta all'Accademia il 1° luglio 1921.

[2] È chiaro che l'esistenza di questo limite risulta senz'altro da quanto precede. Si noti che $\frac{\partial^3 \alpha}{\partial x^3}$ tende, in A e B, a infinito di ordine maggiore d'uno, cambiando però infinite volte di segno.

Per raggiungere questo scopo, introduciamo la funzione:

$$(7)\qquad \beta(x\,,\,y\,;\,x_0\,,\,y_0) = -(x_0 - x)\int_0^{\frac{x_0-x}{2\sqrt{y_0-y}}} (\operatorname{sen}\varphi^2 + \cos\varphi^2)\,d\varphi +$$

$$+\sqrt{y_0 - y}\left(\operatorname{sen}\frac{(x_0-x)^2}{4(y_0-y)} - \cos\frac{(x_0-x)^2}{4(y_0-y)}\right),\ (y_0 > y)\,,$$

ove, ancora, intendiamo il radicale sia preso positivamente. Come subito si vede, è

$$(8)\qquad \frac{\partial^2\alpha}{\partial x^2} = -\frac{\partial\beta}{\partial y}\,,$$

e, quindi, con una integrazione per parti, abbiamo subito,

$$(9)\qquad \lim_{\varepsilon=0}\int_{s(y_0-\varepsilon)} \frac{\partial^3\alpha}{\partial x^3}\,u\,dy = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\,(u_A + u_B) +$$

$$+\int_{s(y_0)}\left[\left(\frac{\partial^2\beta}{\partial x^2}\,u + \frac{\partial\beta}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x}\right)dx + \frac{\partial\beta}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y}\,dy\right].$$

Gl'integrali a secondo membro sono ora integrali propri, poichè $\frac{\partial\beta}{\partial x}$ è finita in A e B, mentre $\frac{\partial^2\beta}{\partial x^2}$ diventa infinita, in questi stessi punti, di ordine $\frac{1}{2}$. Risulta così determinato il limite del secondo membro della (6). Se poi si nota che tra le funzioni α e β sussiste anche la relazione

$$(10)\qquad \frac{\partial^2\beta}{\partial x^2} = \frac{\partial\alpha}{\partial y}\,,$$

nel limite anzidetto, i termini

$$\int_{s(y_0)} \frac{\partial^2\beta}{\partial x^2}\,u\,dx\,,\ -\int_{s(y_0)} \frac{\partial\alpha}{\partial y}\,u\,dx\,,$$

si elidono. Inoltre, per ottenere una maggiore simmetria nelle formule definitive, abbiamo, ancora in conseguenza della (8), e con una nuova integrazione per parti:

$$(11)\qquad \int_{s(y_0)} \frac{\partial u}{\partial x}\left(\frac{\partial \beta}{\partial x}\,dx - \frac{\partial^2 \alpha}{\partial x^2}\,dy\right) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\Big\{[x_0 - \xi_1(y_0)]\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_A + \\ + [x_0 - \xi_2(y_0)]\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_B\Big\} - \int_{s(y_0)} \beta\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\,dx + \frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}\,dy\right).$$

Riunendo tutti i precedenti risultati, e posto, per brevità:

$$(12)\qquad H(x_0, y_0) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{s(y_0)} \Big[\Big(\alpha\frac{\partial u}{\partial y} - \beta\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\Big)\,dx + \\ + \Big(\frac{\partial \beta}{\partial x}\,\frac{\partial u}{\partial y} - \beta\,\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} + \frac{\partial \alpha}{\partial x}\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \alpha\,\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\Big)\,dy\Big],$$

otteniamo, infine:

$$(13)\qquad 2\,u(x_0, y_0) = u_A + u_B + [x_0 - \xi_1(y_0)]\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_A + \\ + [x_0 - \xi_2(y_0)]\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_B + H(x_0, y_0).$$

La (13) sussiste, se $0 \equiv (x_0, y_0)$ è interno al segmento AB. Se 0 è fuori del segmento stesso, si dimostra, similmente, la formula:

$$(14)\qquad 0 = u_A - u_B + [x_0 - \xi_1(y_0)]\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_A - \\ - [x_0 - \xi_2(y_0)]\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_B \pm H(x_0, y_0),$$

ove si deve scegliere il segno $\pm$ secondochè $x_0 > \xi_2(y_0)$, o $x_0 < \xi_1(y_0)$.

5. Come nella formula del Volterra, relativa all'equazione del calore, nella (13) compaiono, oltre alle funzioni al contorno, che determinano la soluzione della equazione differenziale, altre funzioni, che occorre eliminare, se ci proponiamo di risolvere, per l'equazione stessa, il problema di Cauchy, corrispondente al contorno considerato. Si riconosce facilmente, che tale eliminazione si può effettuare, come nella formula citata del Volterra, se il contorno s ha forme speciali, e negli stessi casi dal Volterra contemplati.