ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA NAZIONALE

DEI LINCEI

ANNO CCCXVIII.

1921

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXX.

2° Semestre.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1921

Matematica. — *Sopra il numero delle classi di forme aritmetiche definite di Hermite.* — Nota II del dott. ALBERTO BEDARIDA, presentata dal Socio L. BIANCHI [1].

3. *Conclusioni.* I risultati precedenti ci hanno permesso di scrivere le seguenti relazioni, che formano l'oggetto delle attuali ricerche.

a) *Siano* $h(\varDelta)$ *ed* $h(\varDelta\mu\mu_0)$ $(\varDelta < 0 \neq -1)$, *i numeri delle classi di forme definite (positive) aritmetiche di Hermite, rispettivamente a determinante* $\varDelta$ *e* $\varDelta\mu\mu_0$, *ove* μ *è un numero primo nel corpo* $K(\sqrt{-1})$, *e primitive di prima specie, siano inoltre* $h_1(\varDelta)$ *ed* $h_2(\varDelta)$ *i numeri delle classi di forme definite (positive) aritmetiche di Hermite, a determinante* $\varDelta$, *primitive di prima specie, rispettivamente a gruppo automorfo aritmetico* G_2 *e* G_4. *Secondo la natura aritmetica del numero primo* μ, *nel corpo* $K(\sqrt{-1})$, *si hanno le seguenti relazioni:*

α) *Sia* μ *un numero primo razionale* p, $(p \equiv 3 (mod.\ 4))$, *sarà: se* $\varDelta \equiv 0\ (mod.\ p)$,

$$h(\varDelta p^2) = p^2 h_1(\varDelta) + \frac{p^2+1}{2} h_2(\varDelta);$$

se $\varDelta \not\equiv 0\ (mod.\ p)$,

$$\text{per} \left(\frac{\varDelta}{p}\right) = +1\ ,\quad h(\varDelta p^2) = (p-1)^2 h_1(\varDelta) + \left[\frac{(p-1)^2}{2} + 1\right] h_2(\varDelta)\,,$$

$$\text{per} \left(\frac{\varDelta}{p}\right) = -1\ ,\quad h(\varDelta p^2) = [(p-1)^2 - 2] h_1(\varDelta) + \frac{(p-1)^2}{2} h_2(\varDelta);$$

β) *Sia* μ *un numero primo complesso (dispari)* π, $(N(\pi) = q \equiv \equiv 1\ (mod.\ 4))$, *sarà: se* $\varDelta \equiv 0\ (mod.\ q)$,

$$h(\varDelta q) = q h_1(\varDelta) + \frac{q+1}{2} h_2(\varDelta);$$

se $\varDelta \not\equiv$ *(mod.* q*),*

$$h(\varDelta q) = q h_1(\varDelta) + \left[\frac{q+1}{2} + 1\right] h_2(\varDelta);$$

ed inoltre,

$$h(\varDelta) = h_1(\varDelta) + h_2(\varDelta).$$

[1] Pervenuta all'Accademia il 24 giugno 1921.

b) Siano $h'(\Delta)$ *ed* $h'(\Delta\mu\mu_0)$, $(\Delta < 0$ *e* $\neq -2, -3$; $\Delta \equiv 1, 2$ *(mod. 4))* *i numeri delle classi di forme definite (positive) aritmetiche di Hermite, rispettivamente a determinante* Δ *e* $\Delta\mu\mu_0$, *ove* μ *è un numero primo nel corpo* $K(\sqrt{-1})$, *e primitive di seconda specie; siano inoltre* $h'_1(\Delta)$, $h'_2(\Delta)$ *ed* $h'_3(\Delta)$ *i numeri delle classi di forme definite (positive) aritmetiche di Hermite, a determinante* Δ, *primitive di seconda specie, rispettivamente a gruppo automorfo aritmetico* G_2, G_4, G_6. *Secondo la natura aritmetica del numero primo* μ, *nel corpo* $K(\sqrt{-1})$, *si hanno le seguenti relazioni:*

α) sia μ *un numero primo razionale* p, $(p \equiv 3$ *(mod. 4))*, *e* $\neq 3$, *sarà: se* $\Delta \equiv 0$ *(mod. p)*,

$$h'(\Delta p^2) = p^2 h'_1(\Delta) + \frac{p^2+1}{2} h'_2(\Delta) + \frac{p^2+2}{3} h'_3(\Delta)\,;$$

se $\Delta \not\equiv 0$ *(mod. p)*,

$$\text{per } \left(\frac{\Delta}{p}\right) = +1\ (p \equiv 1 \ (\text{mod. } 3))\ ,\ h'(\Delta p^2) = (p-1)^2 h'_1(\Delta) + \\ + \left[\frac{(p-1)^2}{2} + 1\right] h'_2(\Delta) + \frac{(p-1)^2}{3} h'_3(\Delta)\,.$$

$$\text{per } \left(\frac{\Delta}{p}\right) = -1\ (p \equiv 2 \ (\text{mod. } 3))\ ,\ h'(\Delta p^2) = ((p-1)^2 - 2)\, h'_1(\Delta) + \\ + \frac{(p-1)^2}{2} h'_2(\Delta) + \frac{(p-1)^2 - 1}{3} h'_3(\Delta)\,;$$

β) sia μ *un numero primo complesso (dispari)* π, $(N(\pi) = q \equiv 1$ *(mod. 4))*, *sarà: se* $\Delta \equiv 0$ *(mod. q)*, $(q \equiv 1 \ (\text{mod. } 3))$:

$$h'(\Delta q) = q h'_1(\Delta) + \frac{q+1}{2} h'_2(\Delta) + \frac{q+2}{3} h'_3(\Delta)\,;$$

se $\Delta \not\equiv 0$ *(mod. q)*,

$$\text{per } q \equiv 1 \ (\text{mod. } 3) \qquad h'(\Delta q) = q h'_1(\Delta) + \left[\frac{q+1}{2} + 1\right] h'_2(\Delta) + \\ + \left[\frac{q+2}{3} + 1\right] h'_3(\Delta)\,,$$

$$\text{per } q \equiv 2 \ (\text{mod. } 3) \qquad h'(\Delta q) = q h'_1(\Delta) + \left[\frac{q+1}{2} + 1\right] h'_2(\Delta) + \\ + \frac{q+1}{3} h'_3(\Delta)\,,$$

ed inoltre,

$$h'(\varDelta) = h'_1(\varDelta) + h'_2(\varDelta) + h'_3(\varDelta) \text{ [1]}.$$

Quanto si è sopra esposto formerà l'oggetto di una Memoria, in cui sarà pure esaminato il caso delle forme indefinite di Hermite ($\varDelta > 0$).

Noi ritorneremo, inoltre, sopra questi studî, coll'intendimento di estenderli al caso di un corpo quadratico (immaginario) generale e per esaminare se, eventualmente, esiste un legame tra i nostri risultati e quelli ottenuti recentemente da Humbert, sopra queste forme, con l'Aritmetica analitica.

Matematica. — *Le superficie ellittiche il cui determinante è un numero composto.* Nota III del dott. Oscar Chisini, presentata dal Corrispondente F. Enriques [2].

5. Quanto alla *identità birazionale* di due superficie ellittiche F ed F', di cui abbiamo trattato nelle nostre precedenti Note del 3 e del 17 aprile, ciascuna delle quali abbiamo visto (seconda Nota, § 3) esser data da equazioni del tipo (3) o del tipo (4), è chiaro che tale identità dipende dall'essere simili i sistemi di sostituzioni che subiscono i punti $P_1 P_2 \dots P_n$ della F, ed i punti $P'_1 P'_2 \dots P'_n$ della F', omologhi di un medesimo P del cilindro Φ, quando P si muova descrivendo comunque un cammino C_i sopra la varietà riemanniana del cilindro Φ: dovranno quindi anzitutto essere birazionalmente identiche le curve K della F alle K' della F', e coincidere le curve di diramazione $z = k_i$. Ma ciò non è sufficiente, potendosi avere due *superficie distinte* anche quando siano *identiche* le *curve* corrispondenti alle sezioni del cilindro coi piani $z =$ cost., e anche quelle corrispondenti alle generatrici del cilindro stesso. Per completare la condizione di identità esaminiamo particolarmente i due casi.

a) Nel *caso ciclico*, se si hanno due superficie F ed F' identiche, date da $\sqrt[n]{\psi\theta}$ e $\sqrt[n]{\psi'\theta'}$, avendosi come sezioni $z =$ cost. due curve K e K' identiche, relative a terne di punti critici apparenti, D e D', con $D' + (h-1)T \equiv hD$, essendo $\alpha' = \alpha^h$, $\beta' = \beta^h$, dovrà essere $\theta'(z) = \theta^h(z)$, o più generalmente (le radici di θ e θ' avendo una moltiplicità minore di n) $\theta^h = \theta' \bar{\theta}^n$: pertanto, ove sia $\theta' = \theta$, sarà $h = 1$, cioè *le terne di punti*

[1] Si noti che i coefficienti di $h_1(\varDelta)$, $h_2(\varDelta)$, $h_1'(\varDelta)$, $h_2'(\varDelta)$, $h_3'(\varDelta)$ in tutte le relazioni precedenti sono interi (razionali). Nel risultato *b*) il caso $p = 3$ offre analoghe relazioni, che, per brevità, non scriviamo.

Inoltre osserviamo che i numeri $h_1(\varDelta)$, $h_1'(\varDelta)$ ed $h_3'(\varDelta)$ in alcuni casi possono essere tutti nulli, in altri sono tali soltanto alcuni di essi; invece $h_2(\varDelta)$ ed $h_2'(\varDelta)$ sono sempre, come è ben naturale, diversi da zero.

[2] Pervenuta il 17 aprile 1921.