ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

ANNO CCCXVIII.

1921

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXX.

2° Semestre.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1921

ed inoltre,

$$h'(\Delta) = h'_1(\Delta) + h'_2(\Delta) + h'_3(\Delta) \ [1].$$

Quanto si è sopra esposto formerà l'oggetto di una Memoria, in cui sarà pure esaminato il caso delle forme indefinite di Hermite ($\Delta > 0$).

Noi ritorneremo, inoltre, sopra questi studî, coll'intendimento di estenderli al caso di un corpo quadratico (immaginario) generale e per esaminare se, eventualmente, esiste un legame tra i nostri risultati e quelli ottenuti recentemente da Humbert, sopra queste forme, con l'Aritmetica analitica.

Matematica. — *Le superficie ellittiche il cui determinante è un numero composto.* Nota III del dott. OSCAR CHISINI, presentata dal Corrispondente F. ENRIQUES [2].

5. Quanto alla *identità birazionale* di due superficie ellittiche F ed F', di cui abbiamo trattato nelle nostre precedenti Note del 3 e del 17 aprile, ciascuna delle quali abbiamo visto (seconda Nota, § 3) esser data da equazioni del tipo (3) o del tipo (4), è chiaro che tale identità dipende dall'essere simili i sistemi di sostituzioni che subiscono i punti $P_1 P_2 \ldots P_n$ della F, ed i punti $P'_1 P'_2 \ldots P'_n$ della F', omologhi di un medesimo P del cilindro Φ, quando P si muova descrivendo comunque un cammino C_i sopra la varietà riemanniana del cilindro Φ: dovranno quindi anzitutto essere birazionalmente identiche le curve K della F alle K' della F', e coincidere le curve di diramazione $z = k_i$. Ma ciò non è sufficiente, potendosi avere due *superficie distinte* anche quando siano *identiche* le *curve* corrispondenti alle sezioni del cilindro coi piani $z =$ cost., e anche quelle corrispondenti alle generatrici del cilindro stesso. Per completare la condizione di identità esaminiamo particolarmente i due casi.

a) Nel *caso ciclico*, se si hanno due superficie F ed F' identiche, date da $\sqrt[n]{\psi\theta}$ e $\sqrt[n]{\psi'\theta'}$, avendosi come sezioni $z =$ cost. due curve K e K' identiche, relative a terne di punti critici apparenti, D e D', con $D' + (h-1)T \equiv hD$, essendo $\alpha' = \alpha^h$, $\beta' = \beta^h$, dovrà essere $\theta'(z) = \theta^h(z)$, o più generalmente (le radici di θ e θ' avendo una moltiplicità minore di n) $\theta^h = \theta' \overline{\theta}^n$: pertanto, ove sia $\theta' = \theta$, sarà $h = 1$, cioè *le terne di punti*

[1] Si noti che i coefficienti di $h_1(\Delta)$, $h_2(\Delta)$, $h_1'(\Delta)$, $h_2'(\Delta)$, $h_3'(\Delta)$ in tutte le relazioni precedenti sono interi (razionali). Nel risultato *b*) il caso $p = 3$ offre analoghe relazioni, che, per brevità, non scriviamo.

Inoltre osserviamo che i numeri $h_1(\Delta)$, $h_1'(\Delta)$ ed $h_3'(\Delta)$ in alcuni casi possono essere tutti nulli, in altri sono tali soltanto alcuni di essi; invece $h_2(\Delta)$ ed $h_2'(\Delta)$ sono sempre, come è ben naturale, diversi da zero.

[2] Pervenuta il 17 aprile 1921.

critici apparenti dovranno essere non solo simili, ma equivalenti. E ciò è anche sufficiente per l'identità birazionale delle F ed F' cicliche.

b) Per l'esame del *caso non ciclico* occorre riprendere in esame la condizione di identità delle curve (2), mettendone in evidenza l'*aspetto aritmetico*, e a tal uopo premettere un'osservazione relativa ai gruppi abeliani.

Siano τ_1 e τ_2 due operazioni del nostro gruppo abeliano G definito da π_1 e π_2, ed abbiano gli stessi periodi, $\nu_1 = \varrho\nu_2$ e ν_2, di π_1 e π_2: sarà

$$\tau_1 = \pi_1^{a_1}\,\pi_2^{a_2}\,,\ \tau_2 = \pi_1^{b_1}\,\pi_2^{b_2}\,,$$

dove a_1 sarà primo con ϱ e b_1 multiplo di ϱ: $b_1 = \varrho\bar{b}_1$.

Diciamo che *la condizione affinchè* τ_1 e τ_2 *generino l'intero* G (cioè abbiano effettivamente i periodi ν_1 e ν_2 e siano indipendenti) *è che il determinante*

$$\Delta = a_1 b_2 - a_2 b_1$$

sia primo con ν_2.

La condizione è sufficiente: infatti, se τ_1 e τ_2 non generassero tutto G, si avrebbero due numeri h e k non multipli contemporaneamente l'uno di ν_1 e l'altro di ν_2, tali che $\tau_1^h\tau_2^k \equiv 1$, il che porta (data l'indipendenza di π_1 e π_2) $ha_1 + kb_1 \equiv 0$ mod. ν_1, e $ha_2 + kb_2 \equiv 0$ mod. ν_2, dalla prima delle quali relazioni (essendo $\nu_1 = \varrho\nu_2$, $b_1 = \varrho\bar{b}_1$ ed a_1 primo con ϱ) segue che h è multiplo di $\varrho : h = \varrho\bar{h}$; si ha così contemporaneamente

$$\bar{h}a_1 + k\bar{b}_1 \equiv 0 \text{ mod. } \nu_2 \text{ e } \varrho\bar{h}a_2 + kb_2 \equiv 0 \text{ mod. } \nu_2\,,$$

da cui segue

$$\bar{h}(a_1b_2 - \varrho a_2\bar{b}_1) \equiv k(\varrho a_2\bar{b}_1 - a_1b_2) \equiv 0 \text{ mod. } \nu_2:$$

cioè, essendo $b_1 = \varrho\bar{b}_1$ ed $\bar{h} = \dfrac{h}{\varrho}$ non multiplo di ν_2 insieme con k, dovrà $\Delta = a_1b_2 - a_2b_1$ avere un divisore comune con ν_2.

Viceversa si supponga che Δ e ν_2 abbiano un divisore comune δ, e si osservi che in tale ipotesi

$$\tau_1^{\frac{\nu_2 b_1}{\delta}} \quad \tau_2^{-\frac{\nu_2 a_1}{\delta}} = \pi_2^{\frac{\nu_2}{\delta}(a_2b_1 - a_1b_2)} = 1\,.$$

Ciò posto: o δ divide contemporaneamente a_1 e b_1, e allora è chiaro che τ_1 e τ_2 non generano tutto G ma solo le operazioni del tipo $\pi_1^{\delta r}\,\pi_2^{s}$; o invece δ non divide contemporaneamente a_1 e b_1, e allora l'eguaglianza precedente dice che τ_1 e τ_2 non sono indipendenti o hanno periodi minori di ν_1 e ν_2, sicchè in ogni caso non generano l'intero G.

Ora è noto (ed è chiaro) che, se τ_1 e τ_2 hanno i periodi ν_1 e ν_2 e sono indipendenti, esiste una sostituzione che trasforma contemporaneamente π_1 e

π_2 in τ_1 e τ_2: pertanto, se a un cammino C_i, percorso da P sulla riemanniana di φ, corrisponde la sostituzione $\pi_1^{r_i}\pi_2^{s_i}$ per una certa funzione

$$X = \sqrt[\nu_1]{\psi_1} + \sqrt[\nu_2]{\psi_2},$$

e per un'altra

$$X' = \sqrt[\nu_1]{\psi_1'} + \sqrt[\nu_2]{\psi_2'}$$

corrisponde la sostituzione

$$\tau_1^{r_i}\tau_2^{s_i} = \pi_1^{a_1 r_i + b_1 s_i}\pi_2^{a_2 r_i + b_2 s_i},$$

avendosi $\Delta = a_1 b_2 - a_2 b_1$ primo con ν_2 (a_1 primo con $\varrho = \frac{\nu_1}{\nu_2}$ e b_2 divisibile per ϱ), le due funzioni X ed X′ sono birazionalmente identiche; ed è facile a riconoscersi che sono identiche solo in questo caso.

Ora le due sostituzioni π_1 e π_2 consistono nel moltiplicare i due radicali d'ordine ν_1 e ν_2, che figurano in X rispettivamente per $\varepsilon_1 = \cos\frac{\pi}{\nu_1} + i \operatorname{sen}\frac{\pi}{\nu_1}$ e per $\varepsilon_2 = \cos\frac{\pi}{\nu_2} + i \operatorname{sen}\frac{\pi}{\nu_2}$, onde le stesse sostituzioni $\tau_1^{r_i}\tau_2^{s_i}$ sono presentate dalla funzione

$$\sqrt[\nu_1]{\psi_1'\overline{\psi}_1^{\nu_1}} + \sqrt[\nu_2]{\psi_2'\overline{\psi}_2^{\nu_2}} \quad \text{e dalla} \quad \sqrt[\nu_1]{\psi_1^{a_1}\psi_2^{b_1}} + \sqrt[\nu_2]{\psi_2^{b_2}\psi_1^{a_2}};$$

quindi, ove si prendano come $\overline{\psi}_1 = 0$ e $\overline{\psi}_2 = 0$ due curve d'ordine $a_1 + b_1 - 1$ e $b_2 + a_2 - 1$, i gruppi dei punti di contatto ν_1 — *punto* e ν_2 — *punto* di $\psi_1'\overline{\psi}_1^{\nu_1} = 0$ e $\psi_2'\overline{\psi}_2^{\nu_2} = 0$ con la $\varphi = 0$ sono equivalenti a quelli delle $\psi_1^{a_1}\psi_1^{b_1} = 0$ e $\psi_2^{b_2}\psi_1^{a_2} = 0$ (giacchè dalle serie cui appartengono i gruppi di contatto dipendono le sostituzioni subìte dai radicali).

Pertanto, indicati con D_1, D_2, D_1', D_2', le terne di contatto delle ψ_1, ψ_2, ψ_1', ψ_2', e con T la terna segata da una retta, saranno

(5) $a_1 D_1 + b_1 D_2 \equiv D_1' + (a_1 + b_1 - 1)T ; a_2 D_1 + b_2 D_2 \equiv D_2' + (a_2 + b_2 - 1)T$

le condizioni perchè le X, X′ siano identiche.

Analogalmente a quanto è stato fatto nel caso ciclico, definiremo come *simili* (rispetto ai numeri ν_1 e ν_2) le coppie di gruppi D_1 e D_2, D_1' e D_2', soddisfacenti alle (5).

Passando ora dalle curve alle superficie, si consideri una superficie F′ data da

$$(4') \quad \left\{ \begin{array}{l} X' = \sqrt[\nu_1]{\psi_1'\theta_1'} + \sqrt[\nu_2]{\psi_2'\theta_2'} \\ Y = y\ ,\ Z' = z \end{array} \right. \qquad \varphi(xy) = 0 \quad (\nu_1 = c\nu_2)$$

birazionalmente identica alla F data dalle (4). Per le sezioni $z =$ cost. dovranno anzitutto essere soddisfatte le condizioni di similitudine (5), le quali dicono che le sostituzioni sui punti di F′ (cioè sui valori dei radicali della sua equazione) relative ai cicli C_i si ottengono dalle analoghe sui punti di F, cambiando

$$\pi_1 \text{ e } \pi_2 \text{ in } \tau_1 = \pi_1^{a_1} \pi_2^{a_2} \text{ e } \tau_2 = \pi_1^{b_1} \pi_2^{b_2} ;$$

questo dunque dovrà accadere oltre che per i cicli C_i non nulli, anche per cicli avvolgenti le superficie di diramazione date (sulla varietà riemanniana del cilindro Φ) dalle equazioni

$$\theta_1(z) = 0 \ , \ \theta_2(z) = 0 \ , \ \theta_1'(z) = 0 \ , \ \theta_2'(z) = 0 \, .$$

Il polinomio θ_1' dovrà dunque differire da $\theta_1^{a_1} \theta_2^{b_1}$ per un fattore $\overline{\theta}_2$ elevato all'esponente ν_1, e l'analogo dicasi per θ_2'; dovrà cioè essere

$$\theta_1^{a_1} \theta_2^{b_1} = \theta_1' \overline{\theta}_1^{\nu_1} \ , \ \theta_2^{b_2} \theta_1^{a_2} = \theta_2' \overline{\theta}_2^{\nu_2} \ ,$$

Riassumendo, *le condizioni perchè due superficie* F *ed* F′ *rappresentate dalle* (4) *e* (4′) *riescano birazionalmente identiche sono che*:

1°) *le coppie dei gruppi di contatto delle curve* $\psi_1, \psi_2, \psi_1', \psi_2'$, *siano simili*, soddisfacendo alle relazioni

$$a_1 D_1 + b_1 D_2 \equiv D_1' + (a_1 + b_1 - 1) T \ , \ a_2 D_1 + b_2 D_2 \equiv D_2' + (a_2 + b_2 - 1) T ,$$

avendosi a_1 primo con $\varrho = \frac{\nu_1}{\nu_2}$, b_1 divisore di ϱ, $\varDelta = a_1 b_2 - a_2 b_1$ primo con ν_2;

2°) *esistano due polinomi* $\overline{\theta}_1$ e $\overline{\theta}_2$ *tali che* $\theta_1^{a_1} \theta_2^{b_1} = \theta_1' \overline{\theta}_1^{\nu_1}$, $\theta_2^{b_2} \theta_1^{a_2} = \theta_2' \overline{\theta}_2^{\nu_2}$.

In *particolare*, ove si voglia, $\theta_1 = \theta_1'$, $\theta_2 = \theta_2'$, dovremo avere:

$$a_1 = 1 \ , \ b_1 = 0 \ , \ b_2 = 1 \ , \ a_2 = 0 \ ,$$

sicchè le *terne dei punti di contatto* di ψ_1 e ψ_1', ψ_2 e ψ_2' *debbono essere equivalenti.*

NOTA. I risultati esposti sono stati ottenuti poggiando sul teorema di *Abel*, che dà la definizione trascendente delle serie lineari: ai risultati stessi si potrebbe pervenire per via analitica in base ai teoremi delle trasformazioni delle funzioni ellittiche, o anche per via puramente algebrica, partendo dal teorema d'esistenza, usando le formule numerative inerenti alla divisione delle serie, ed osservando che $\sqrt[n]{\psi_1}$ e $\sqrt[n]{\psi_1^h}$ dànno lo stesso irrazionale ove sia h primo con n. Ma non crediamo necessario diffonderci qui su questa seconda via.