ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA NAZIONALE

DEI LINCEI

ANNO CCCXVIII.

1921

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXX.

2° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1921

MEMORIE E NOTE PRESENTATE DA SOCI

Matematica. — *Sulle relazioni fra le misure di un insieme variabile e dell'insieme suo limite.* Nota del dott. GABRIELE MAMMANA, presentata dal Socio LUIGI BIANCHI [1].

In una Nota sugli integrali dipendenti da parametri, attualmente in corso di stampa presso il Circolo matematico di Catania, stabilisco che un integrale

$$\varphi(q) = \int_{E(q)} f(pq)\,dp$$

esteso a un insieme $E(q)$ variabile col punto q, è continuo se

$$\lim_{q'=q} m\,[E(q) + E(q') - E(q)E(q')] = 0 \tag{1}$$

e chiamo insiemi variabili con continuità gli insiemi che soddisfano alla (1).

D'altra parte si ha già il concetto di limite di un insieme variabile [2] per modo che si sarebbe indotti a dire che un insieme varia in modo continuo quando

$$\lim_{q'=q} E(q') = E(q)\,. \tag{2}$$

Di questa relazione di limite si è fin ora detto soltanto che

$$\lim_{q'=q} m\,E(q') = m\,E(q)\,.$$

In questa Nota dimostrerò che vale invece la relazione (1) che è più significativa, in quanto per essa si mette in evidenza come, col tendere di q' a q *le parti non comuni all'insieme limite* $E(q)$ *ed all'insieme* $E(q')$ *finiscono per acquistare e conservare poi sempre misura piccola come si vuole.* Così resta pure provato che la (2) ha di conseguenza la (1); viceversa la (2) in generale non consegue dalla (1), di modo che la definizione

[1] Pervenuta all'Accademia il 23 luglio 1921.

[2] Veramente il limite viene definito (ved. De La Vallée Poussin: *Les intégrales de Lebesgue*, etc., Paris, Gauthier-Villars et C., 1916, pag. 8) per una successione illimitata di insiemi; però l'estensione al caso di un insieme $E(q)$ variabile con un punto è immediata: basterà, per questo, definire $\lim_{q'=q} E(q')$ l'insieme che ha per funzione caratteristica il limite (quando esiste) per q' tendente a q della funzione caratteristica corrispondente a $E(q')$. Il limite così definito (si può dimostrare) è misurabile, se lo sono gli insiemi $E(q')$ considerati, e la sua misura è limite delle misure in $E(q')$ degli insiemi stessi.

di insieme variabile con continuità, da me data, viene ad avere significato più largo di quello espresso dalla (2).

Per semplicità mi limiterò qui a considerare solo il caso di una successione illimitata di insiemi; l'estensione, del resto, al caso di un insieme $E(q)$ variabile è immediata [ved. la nota ([2]) della pag. prec.].

Si abbia la successione convergente di insiemi misurabili

$$E_1, E_2, \ldots E_n \ldots \tag{1}$$

e sia

$$E = \lim_{n=\infty} E_n .$$

φ_n, e φ, $(\varphi = \lim_{n=\infty} \varphi_n)$ indichino rispettivamente le funzioni caratteristiche di E_n e di E.

Fra le misure dei termini della (1) e del limite E, intanto, vale la relazione ([1])

$$\lim_{n=\infty} | mE - mE_n | = 0 . \tag{2}$$

Consideriamo l'altra successione che si ottiene dalla (1) moltiplicandone i termini per E:

$$EE_1, EE_2, \ldots EE_n, \ldots ; \tag{3}$$

dico che questa è convergente ed il suo limite è ancora E.

Invero, la funzione caratteristica Φ_n del termine generale EE_n è data, come è noto, dal prodotto delle caratteristiche di E e di E_n; cioè $\Phi_n = \varphi\varphi_n$. Ora si ha

$$\lim_{n=\infty} \Phi_n = \lim_{n=\infty} \varphi\varphi_n = \varphi \lim_{n=\infty} \varphi_n = \varphi^2 \varphi$$

e quindi la (3) converge, ed ha per limite l'insieme che ha φ per caratteristica, cioè l'insieme E. Ciò poteva anche vedersi direttamente, applicando i teoremi elementari sui limiti di insiemi.

Ma la misura del limite di una successione di insiemi, è limite delle misure degli insiemi stessi: perciò

$$\begin{aligned} &\lim_{n=\infty} (mE - mEE_n) = 0 \text{ e, per la (2), anche} \\ &\lim_{n=\infty} (mE_n - mEE_n) = 0 . \end{aligned} \tag{4}$$

A queste due relazioni possiamo sostituire la relazione unica equivalente

$$\lim_{n=\infty} m(E + E_n - EE_n) = 0 . \tag{5}$$

([1]) De La Vallée Poussin, opera citata, pag. 27.

Inversamente: Data la (1), ogni insieme F che soddifi alle condizioni espresse dalla (5) o, ciò che fa lo stesso, dalle (4), e cioè

$$\lim_{n=\infty} (m\mathrm{F} - m\mathrm{FE}_n) = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{n=\infty} (m\mathrm{E}_n - m\mathrm{FE}_n) = 0\,,$$

può differire dal limite E della (1) al più per insiemi di misura nulla.

Infatti dalla ipotesi consegue

$$m\mathrm{F} = \lim_{n=\infty} m\mathrm{FE}_n\,, \quad \text{e} \quad \lim_{n=\infty} m\mathrm{E}_n = m\mathrm{E} = \lim_{n=\infty} m\mathrm{FE}_n\,,$$

da cui $m\mathrm{F} = m\mathrm{E}$.

D'altra parte, se si considera la successione $\mathrm{FE}_1, \mathrm{FE}_2, \ldots \mathrm{FE}_n, \ldots$ pei teoremi elementari sui limiti di insiemi si ha [1]

$$\lim_{n=\infty} \mathrm{FE}_n = \lim_{n=\infty} \mathrm{F} \lim_{n=\infty} \mathrm{E}_n = \mathrm{FE}\,,$$

quindi anche

$$m\mathrm{FE} = \lim_{n=\infty} m\mathrm{FE}_n$$

e per conseguenza, infine,

$$m\mathrm{F} = m\mathrm{E} = m\mathrm{FE}\,;$$

ciò che dimostra quanto si è asserito.

Nota. L'esistenza di un insieme F che soddisfi alle condizioni di cui sopra, rispetto ad una qualunqne successione di insiemi, non basta, in generale, ad assicurare la convergenza della successione stessa, come si può constatare dal seguente

Esempio. Consideriamo l'insieme costituito da tutti i punti di un circolo C, ad eccezione di quelli appartenenti ad un suo raggio r. Facciamo rotare C intorno al proprio centro successivamente per angoli di ampiezza $0, w, 2w, 3w \ldots nw$ ($w \neq 2\pi$); indichiamo con $\mathrm{C}_o, \mathrm{C}_1, \mathrm{C}_2, \ldots \mathrm{C}_n \ldots$ (6) gli insiemi corrispondenti alle successive rotazioni, e con $r_o, r_1, r_2, \ldots r_n \ldots$ i raggi di punti esclusi rispettivamente di $\mathrm{C}_o, \mathrm{C}_2 \ldots \mathrm{C}_n \ldots$ Ora, se w è commensurabile con 2π, per un certo valore m di n e pei suoi multipli, C riprende la posizione iniziale e perciò in un qualunque punto di r_o (per esempio) la funzione caratteristica φ_n di C_n, col crescere di n, assume alternativamente valori uguali a zero e a uno, e non ha limite; e lo stesso avverrà della (6). Invece, se w è incommensurabile con 2π, C non riprende mai una stessa posizione, per quanto cresca n; quindi in un punto P qualunque interno a C la φ_n o è sempre uno, qualunque sia n (cioè r_n non passa mai per P), o assume il valore zero solo per un dato valore m di n, e poi per $n > m$ ritorna ancora e rimane sempre 1. In ogni caso il suo limite per $n = \infty$ esiste ed è uno nei punti interni a C, e zero nei punti esterni; e la (6) per conseguenza ha per limite l'insieme (dominio) di tutti i punti di C.

(1) Ved. De La Vallée Poussin, opera citata, pag. 10,

D'altra parte il dominio costituito da tutti i punti di C gode, tanto nel primo come nel secondo caso, delle proprietà espresse dalla (5).

Possiamo enunciare il teorema:

Teorema. Condizione necessaria perchè un insieme E sia limite di una successione di insiemi $E_1, E_2, \dots E_n, \dots$ è che

$$\lim_{n=\infty} m\,(E + E_n - EE_n) \text{ sia} = 0\,.$$

Questa condizione non basta in generale ad assicurare l'esistenza del limite della successione stessa; però, se questo esiste, può differire da E al più per insiemi di misura nulla.

Ma si può dire di più, e cioè: Fra i termini di una successione di insiemi $E_1, E_2, E_3, \dots, E_n \dots$ e il suo limite E, intercede la relazione $\lim_{n=\infty} (E + E_n - EE_n) = 0$ che è caratteristica del limite; in altri termini: La condizione necessaria e sufficiente affinchè un insieme E sia limite di una data successione, è che la successione formata colle parti non comuni a E e ai termini della data successione, converga non soltanto verso un insieme di misura nulla [come risulta dalla (5)], ma addirittura verso l'insieme nullo. Così, per esempio, nel caso di insiemi superficiali la successione delle parti non comuni, di cui sopra, non potrebbe tendere neanche a delle linee o a dei punti isolati. Tutto ciò ci darà ragione del perchè la (5) non assicura la convergenza della successione.

Infatti: conservando le notazioni del precedente paragrafo, prendiamo a considerare la successione $(E + E_n - EE_n)$, per $(n = 1, 2, 3, \dots)$ formata colle parti non comuni a E e ai termini della (1), e calcoliamone la caratteristica f_n del termine generale, in funzione delle caratteristiche φ e φ_n rispettivamente di E ed E_n. Applicando i teoremi sulle funzioni caratteristiche (¹), si ha

$$f_n = 1 - (1 - \varphi)(1 - \varphi_n) - \varphi\varphi_n = \varphi + \varphi_n - 2\varphi\varphi_n\,,$$

che potremo anche scrivere:

$$f_n = \varphi^2 + \varphi_n - 2\varphi\varphi_n = (\varphi - \varphi_n)^2\,,$$

e quindi $f_n = \varphi - \varphi_n$.

Ora, se $E = \lim_{n=\infty} E_n$, cioè $\varphi = \lim_{n=\infty} \varphi_n$, sarà $\lim f_n = 0$ e per conseguenza $\lim_{n=\infty} (E + E_n - EE_n) = 0$. Viceversa da quest'ultima consegue la prima, ciò che dimostra il nostro asserto.

(¹) De La Vallée Poussin, op. cit., pag. 7.