ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

ANNO CCCXVIII.
1921

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXX.

2° Semestre.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1921

MEMORIE E NOTE PRESENTATE DA SOCI

Matematica. — *Sulle varietà contenenti più serie di superficie totalmente geodetiche.* Nota di ENRICO BOMPIANI, presentata dal Socio T. LEVI-CIVITA.

1. È noto che se una V_3 possiede ∞^1 superficie totalmente geodetiche (tali cioè che ogni geodetica di una di esse è geodetica per V_3), il suo elemento lineare ha la forma data da Hadamard [1]

$$ds^2 = \sum_1^2 a_{ik}(x_1, x_2)\, dx_i\, dx_k + a_{33}(x_1, x_2, x_3)\, dx_3^2$$

quando le superficie tot. geod. siano le $dx_3 = 0$.

Qui mi propongo di caratterizzare le V_3 che posseggono due serie ∞^1 di sup. tot. geod. con la condizione che la congruenza delle loro linee d'intersezione sia normale.

2. Se entro una V_3, definita metricamente dal $ds^2 = \sum_1^3 a_{ik}(x_1, x_2, x_3)\, dx_i\, dx_k$, è data una superficie col porre $x_i = x_i(u_1, u_2)$ e di $ds^2 = \sum_1^2 b_{rs}(u_1, u_2)\, du_1\, du_2$, condizione necessaria e sufficiente affinchè questa risulti totalmente geodetica per la V_3 è che si abbia [2]

$$\Omega_{rs}^{(i)} = \frac{\partial^2 x_i}{\partial u_r\, \partial u_s} - \sum_\tau \frac{\partial x_i}{\partial u_\tau} \left\{ {rs \atop \tau} \right\}_b + \sum_{\rho\sigma} \left\{ {\rho\sigma \atop i} \right\}_a \frac{\partial x_\rho}{\partial u_r} \frac{\partial x_\sigma}{\partial u_s} = 0 .$$

Per esprimere p. es. che le superficie $dx_3 = 0$ (sulle quali si può assumere $x_1 = u_1$, $x_2 = u_2$) sono tot. geod. basta scrivere i simboli $\{\,\}_b$ ed $\{\,\}_a$

(1) J. Hadamard, *Sur les éléments linéaires à plusieurs dimensions* [Bull. Sciences Mathém., t. XXV, 1901]; ivi sono determinate anche le V_3 con ∞^2 superficie tot. geod., ma non le V_3 con più serie ∞^1 di tali superficie. G. Ricci, nella Nota *Sulle superficie geodetiche in una varietà qualunque e in particolare nelle varietà a tre dimensioni* [Rend. Acc. Lincei, vol. XII, serie 5ª, 1903_1], ha ripreso il problema in generale e, nel caso delle V_3, ha determinato le caratteristiche geometriche di quelle contenenti ∞^2 sup. tot. geod., in relazione alle curvature e congruenze principali in esse contenute.

(2) In questa forma si trovano nella mia Memoria: *Studi sugli spazi curvi; la 2ª forma fondam. di una V_m in V_n* [Atti R. Istituto Veneto di Scienze ecc., in corso di stampa, 1921_1].

in funzione di simboli di Christoffel di 1ª specie relativi a V_3, $[\ ]_a$, e si ottiene

$$a^{(31)} X_1 + a^{(32)} X_2 + a^{(33)} X_3 = 0$$

che deve esser soddisfatta da

$$X_1 = \begin{bmatrix} i\,k \\ 1 \end{bmatrix}_a, \quad X_2 = \begin{bmatrix} i\,k \\ 2 \end{bmatrix}_a, \quad X_3 = \begin{bmatrix} i\,k \\ 3 \end{bmatrix}_a \qquad (i\,, k = 1\,, 2).$$

Di qua, riferita la V_3 alle ∞^1 sup. tot. geod. e alle loro traiettorie ortogonali, si ha il risultato citato di Hadamard.

3. Esistano in V_3 due serie ∞^1 di sup. tot. geod., facenti parte di un sistema triplo ortogonale. Si ha subito

$$ds^2 = dx_1^2 + a_{22}(x_1\,, x_2)\, dx_2^2 + a_{33}(x_1\,, x_3)\, dx_3^2\,;$$

cioè: *se una V_3 contiene due serie ∞^1 di sup. tot. geod. facenti parte di un sistema triplo ortogonale, le superficie di una stessa serie sono fra loro applicabili e l'applicabilità è determinata dalle traiettorie ortogonali alle superficie della serie considerata; e viceversa.*

Se poi esiste una terza serie di sup. tot. geod. passanti per la congruenza d'intersezione delle due prime, si trova

$$ds^2 = \theta^2(x_1)\,(dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2)\,;$$

quindi: *se in una V_3 contenente due serie di sup. tot. geod. facenti parte di un sistema triplo ortogonale esiste una terza serie di sup. tot. geod. passanti per la congruenza d'intersezione delle due prime, la V_3 contiene ∞^2 sup. tot. geod. passanti per la congruenza ed è rappresentabile conformemente sopra uno S_3 euclideo.*

Fra queste sono le V_3 a curvatura costante.

4. La V_3 contenga due serie ∞^1 di sup. tot. geod. *non* ortogonali fra di loro, con congruenza d'intersezione normale. Assunte le sup. ortog. alla congruenza come $dx_1 = 0$ e quelle tot. geod. come $dx_2 = 0$, $dx_3 = 0$, $a_{12} = a_{13} = 0$, $a_{23} \neq 0$.

Le equazioni da soddisfare sono

$$a^{(32)} X_2 + a^{(33)} X_3 = 0$$
$$a^{(22)} Y_2 + a^{(23)} Y_3 = 0$$

per $X_2 = \begin{bmatrix} i\,k \\ 2 \end{bmatrix}$, $X_3 = \begin{bmatrix} i\,k \\ 3 \end{bmatrix}$ $(i\,, k = 1\,, 2)$; $Y_2 = \begin{bmatrix} i\,k \\ 2 \end{bmatrix}$, $Y_3 = \begin{bmatrix} i\,k \\ 3 \end{bmatrix}$ $(i\,, k = 1\,, 3)$.

Da esse si ricava

$$ds^2 = \theta^2(x_1)\,[dx_1^2 + F\,(e^{\lambda}\, dx_2^2 + 2\, dx_2\, dx_3 + e^{\mu}\, dx_3^2)]$$

con F, λ, μ funzioni soltanto di x_2, x_3 legate dalle equazioni

$$\frac{\partial \log F}{\partial x_2} = \frac{\partial \lambda}{\partial x_2} - \frac{\partial \log (e^{\lambda+\mu} - 1)}{\partial x_2} - e^{-\mu} \frac{\partial \log (e^{\lambda+\mu} - 1)}{\partial x_3}$$

$$\frac{\partial \log F}{\partial x_3} = \frac{\partial \mu}{\partial x_3} - \frac{\partial \log (e^{\lambda+\mu} - 1)}{\partial x_3} - e^{-\lambda} \frac{\partial \log (e^{\lambda+\mu} - 1)}{\partial x_2}$$

$$\frac{\partial^2 (\lambda - \mu)}{\partial x_2 \partial x_3} = \frac{\partial}{\partial x_3}\left[e^{-\mu} \frac{\partial \log (e^{\lambda+\mu} - 1)}{\partial x_3}\right] - \frac{\partial}{\partial x_2}\left[e^{-\lambda} \frac{\partial \log (e^{\lambda+\mu} - 1)}{\partial x_3}\right];$$

sicchè. prese due funzioni λ, μ soddisfacenti a quest'ultima, con la condizione $\lambda + \mu \neq 0$, si ha F con una quadratura.

Le ultime equazioni esprimono che linee coordinate (x_2 o x_3) sopra una superficie $dx_1 = 0$ sono per essa geodetiche; riferendo queste superficie ad un sistema di geodetiche e alle loro traiettorie ortogonali, si ha ($x = x_1$):

$$ds^2 = \theta^2(x) [dx^2 + dy^2 + G(y, z)\, dz^2];$$

questo ds^2, come si vede subito, contiene ∞^2 sup. tot. geod. (altro risultato di Hadamard); quindi:

Condizione necessaria e sufficiente affinchè una V_3 *contenga* ∞^2 *sup. tot. geod. è che essa contenga due serie* ∞^1 *di sup. tot. geod.* NON *ortogonali con congruenza d'intersezione normale* (1).

L'interesse di questo risultato sta nel fatto che si ritrova il ds^2 di Hadamard partendo da ipotesi molto meno restrittive: una delle ∞^2 sup. tot. geod. è individuata da una geodetica di una sup. ortogonale alla congruenza più volte nominata e contiene le ∞^1 geodetiche di V_3 che vi si appoggiano.

Tutte le V_2 tot. geod. sono applicabili fra loro e sopra superficie di rotazione (Ricci, loc. cit.).

5. Numerose proprietà di queste V_3 seguono da una delle due forme adottate per il ds^2.

Due superficie tot. geod. si tagliano lungo tutta la geodetica d'intersezione sotto angolo costante $\left(\cos \omega = e^{-\frac{\lambda+\mu}{2}}\right)$ (2); *le geodetiche di una*

(1) Questo fatto è in intima relazione con l'altro (Ricci) che la congruenza ortogonale ad ∞^1 sup. tot. geod. è principale e che non possono esistere due congruenze principali non ortogonali, se non se hanno ∞^1, cioè la V_3 ha necessariamente due curvature principali uguali, ecc.

(2) Ciò è chiaro geometricamente. L'angolo delle due sup. tot. geod. per un punto è l'angolo delle linee x_2, x_3 che vi passano: se il punto si sposta lungo una geodetica della congruenza, gli elementi lineari di x_2, x_3 si spostano per parallelismo di Levi-Civita (perchè formano sempre lo stesso angolo $\pi/2$ con la geodetica ed appartengono in ogni posizione a sup. tot. geod.): in questo spostamento il loro angolo, per una proprietà nota del parallelismo, non varia.

superficie $x_1 =$ cost. *hanno tutte la stessa curvatura geodetica* (*risp. a* V_3) *in tutti i loro punti* $\left(= \frac{d}{dx_1} \frac{1}{\theta}\right)$; il quadrato di questa è la curvatura relativa della superficie rispetto a V_3 (differenza fra la curvatura gaussiana e la curvatura riemanniana secondo la stessa giacitura), cioè: *le* V_2 *ortogonali alla congruenza sono a curvatura relativa costante.*

Di più: *è costante la curvatura riemanniana della* V_3 *per tutte le giaciture tangenti alla congruenza e in tutti i punti di una* V_2 *ad essa ortogonale* (poichè dipende soltanto da θ).

Per caratterizzare fra le nostre V_3 quelle per le quali le V_2 normali alla congruenza sono a curvatura gaussiana costante, possiamo servirci di un teorema di Finsterwalder [1]: esse contengono, oltre alle due serie ∞^1 di sup. tot. geod. da cui siamo partiti, altre due serie ∞^1 contenenti la congruenza d'intersezione delle due prime, rappresentabili linearmente per mezzo dei parametri i quali, uguagliati a zero, individuano le due serie date.

Infine, se le due serie ∞^1 date si tagliano ovunque sotto lo stesso angolo $\omega \, (\neq \pi/2)$, le V_2 normali alla congruenza loro intersezione sono euclidee e si ritrova il $ds^2 = \theta^2(x_1)\,(dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2)$ dato al n. 3 partendo da un'altra proprietà. Queste V_3 si costruiscono in S_5 con equazioni parametriche del tipo

$$y_1 = f(t)\cos\theta \qquad y_3 = f(t)\cos\varphi \qquad y_5 = t\,.$$
$$y_2 = f(t)\,\mathrm{sen}\,\theta \qquad y_4 = f(t)\,\mathrm{sen}\,\varphi$$

6. Scritto il ds^2 di una V_3 del tipo esaminato nella forma $ds^2 = \theta^2(x_1)\,ds_1^2$, si osserva che il ds_1^2 è del tipo di Levi-Civita [contenente una congruenza a parallelismo completo [2]]; sicchè:

Ogni V_3 *con due serie di sup. tot. geod. non ortogonali a congruenza d'intersezione normale è rappresentabile in modo conforme sopra una* $\overline{V}_3$ *dello stesso tipo in cui però le superficie ortogonali alla congruenza sono pure totalmente geodetiche, e la congruenza è a parallelismo completo* (la $\overline{V}_3$, se non è già euclidea, si costruisce in uno S_4 euclideo).

Il modulo della rappresentazione è costante sulle sup. ortog. alla congruenza: sicchè queste si corrispondono in modo isometrico-simile.

(1) Cfr. Jahresbericht d. Deutsch. Mathem. Vereinigung, Bd. V, Leipzig 1899, pp. 50-51.

(2) T. Levi-Civita, *Nozione di parallelismo in una varietà qualunque*, ecc. [Rend. Circ. Matem. di Palermo, tomo XLII, 1917$_1$].