ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA NAZIONALE

DEI LINCEI

ANNO CCCXVIII.

1921

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXX.

2° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1921

Matematica. — *Sulle trasformazioni* T *dei sistemi tripli coniugati di superficie.* Nota del prof. L. P. EISENHART (Princeton), presentata dal Socio L. BIANCHI [1].

1. Se le coordinate cartesiane x, y, z di un punto M nello spazio sono funzioni dei tre parametri u_1, u_2, u_3, affinchè le superficie $u_1 = \text{cost.}$, $u_2 = \text{cost.}$, $u_3 = \text{cost.}$, formino un sistema triplo coniugato C, è necessario e sufficiente che x, y, z soddisfino alle equazioni

$$(1)\quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial^2\theta}{\partial u_1\,\partial u_2} &= \frac{\partial \log a_1}{\partial u_2}\frac{\partial\theta}{\partial u_1} + \frac{\partial \log a_2}{\partial u_1}\frac{\partial\theta}{\partial u_2} \\ \frac{\partial^2\theta}{\partial u_2\,\partial u_3} &= \frac{\partial \log a_2}{\partial u_3}\frac{\partial\theta}{\partial u_2} + \frac{\partial \log a_3}{\partial u_2}\frac{\partial\theta}{\partial u_3} \\ \frac{\partial^2\theta}{\partial u_3\,\partial u_1} &= \frac{\partial \log a_3}{\partial u_1}\frac{\partial\theta}{\partial u_3} + \frac{\partial \log a_1}{\partial u_3}\frac{\partial\theta}{\partial u_1} \end{aligned} \right.$$

dove le funzioni $a_i\ (i = 1, 2, 3)$ verificano le tre condizioni

$$(2)\quad \frac{\partial^2 a_i}{\partial u_j\,\partial u_k} = \frac{\partial \log a_j}{\partial u_k}\frac{\partial a_i}{\partial u_j} + \frac{\partial \log a_k}{\partial u_j}\frac{\partial a_i}{\partial u_k},$$

avendo indicato con i, j, k una permutazione ciclica degli indici 1, 2, 3.

Se θ è una soluzione delle (1), le funzioni

$$(3)\quad \overline{x} = \frac{x}{\theta}\,,\quad \overline{y} = \frac{y}{\theta}\,,\quad \overline{z} = \frac{z}{\theta}$$

sono soluzioni del sistema che si ottiene da (1) cangiandovi le a_i nelle $\overline{a}_i$, date da

$$\overline{a}_i = \frac{a_i}{\theta}\,.$$

Il sistema $\overline{\text{C}}$, di coordinate $\overline{x}$, $\overline{y}$, $\overline{z}$, si dirà un *trasformato radiale* di C.

2 Siccome le a_i soddisfano le (2), le sei equazioni

$$(5)\quad \frac{\partial h_i}{\partial u_j} = (h_j - h_i)\frac{\partial \log a_i}{\partial u_j} \qquad (i \neq j)$$

[1] Presentata nella seduta del 3 giugno 1921.

nelle tre funzioni h_1, h_2, h_3 sono compatibili. Se abbiamo un sistema di soluzioni di queste, sono compatibili, per $i=1,2,3$, le equazioni

$$\frac{\partial x'}{\partial u_i} = h_i \frac{\partial x}{\partial u_i}, \quad \frac{\partial y'}{\partial u_i} = h_i \frac{\partial y}{\partial u_i}, \quad \frac{\partial z'}{\partial u_i} = h_i \frac{\partial z}{\partial u_i}, \tag{6}$$

e le funzioni x', y', z', definite così per quadrature, soddisfano le tre equazioni

$$\frac{\partial^2 \theta'}{\partial u_i \partial u_j} = \frac{\partial \log a'_i}{\partial u_j} \frac{\partial \theta'}{\partial u_i} + \frac{\partial \log a'_j}{\partial u_i} \frac{\partial \theta'}{\partial u_j}. \tag{7}$$

Ne segue che queste funzioni sono le coordinate di un sistema C′, tale che le tangenti alle curve di parametro u_i di C e C′, in punti corrispondenti, sono parallele; e diremo che C e C′ sono sistemi tripli coniugati *paralleli*.

3. Se θ è una soluzione delle (1), la funzione θ', definita da

$$\frac{\partial \theta'}{\partial u_i} = h_i \frac{\partial \theta}{\partial u_i} \quad (i=1,2,3,), \tag{8}$$

è una soluzione delle (7); diremo che essa è la soluzione delle (7) *corrispondente* alla soluzione θ delle (1). Ed ora, se definiamo le tre funzioni x_1, y_1, z_1, con equazioni della forma

$$x_1 = x - \frac{\theta}{\theta'} x', \tag{9}$$

ne deduciamo, derivando,

$$\frac{\partial x_1}{\partial u_i} = \frac{\tau_i}{\theta'^2}\left(x' \frac{\partial \theta}{\partial u_i} - \theta' \frac{\partial x}{\partial u_i}\right) = -\frac{\tau_i}{h_i} \frac{\partial}{\partial u_i}\left(\frac{x'}{\theta'}\right), \tag{10}$$

avendo posto

$$\tau_i = h_i \theta - \theta'. \tag{11}$$

Derivando le (10) rapporto a u_j, si vede che x_1, y_1, z_1 sono soluzioni delle tre equazioni

$$\frac{\partial^2 \theta_1}{\partial u_i \partial u_j} = \frac{\partial \log a_{1i}}{\partial u_j} \frac{\partial \theta_1}{\partial u_i} + \frac{\partial \log a_{1j}}{\partial u_i} \frac{\partial \theta_1}{\partial u_j}, \tag{12}$$

dove si è posto

$$a_{1i} = \frac{a_i \tau_i}{\theta'}. \tag{13}$$

Dunque il punto di coordinate x_1, y_1, z_1 descrive un sistema triplo coniugato C_1. Se ora prendiamo due superficie $u_i = \text{cost.}$ dei sistemi C e C_1 rispettivamente, le rette che uniscono i punti corrispondenti definiti dalle (9) formano una congruenza le cui sviluppabili tagliano queste superficie nelle linee $u_j = \text{cost.}$, $u_k = \text{cost.}$, come ho dimostrato in altro luogo [1].

[1] Trans. Amer. Math. Soc., vol. 18 (1917), p. 109

e le superficie sono nella relazione di una trasformazione T, come ivi è stata definita. Perciò diciamo che le equazioni (9) definiscono una *trasformazione* T di C in C_1. Una tale trasformazione è determinata da un sistema parallelo C′ e da una soluzione θ del sistema (1). Dalle (10) si vede che il trasformato radiale C'_1 di C′, definito dalle

$$x'_1 = \frac{x'}{\theta'}, \tag{14}$$

è parallelo a C_1, e che $\theta^{-1} = -\frac{\theta}{\theta'}$, $\theta'^{-1} = \frac{1}{\theta'}$, sono le corrispondenti soluzioni delle equazioni per C_1 e C'_1. Inoltre le formule

$$x = x_1 - \frac{\theta^{-1}}{\theta'^{-1}} x'_1$$

definiscono C come un trasformato T di C_1.

Se C_1 e C_2 sono trasformati T di C, per mezzo dei sistemi C′ e C″ paralleli a C e delle soluzioni θ_1, θ_2 delle (1), e con θ'_1, θ'_2; θ''_1, θ''_2 indichiamo le soluzioni corrispondenti per le equazioni relative a C′ e C″, allora il sistema C_{12}, definito dalle equazioni della forma

$$x_{12} = x_1 - \frac{\theta_{12}}{\theta'''_{12}}\left(x'' - \frac{\theta''_1}{\theta'_1} x'\right),$$

$$\theta_{12} = \theta_2 - \frac{\theta_1}{\theta'_1}\theta'_2 \, , \quad \theta'''_{12} = \theta''_2 - \frac{\theta''_1}{\theta'_1}\theta'_2 \, ,$$

è un trasformato T di C_1, C_2. Siccome θ'_1 e θ''_2 contengono costanti arbitrarie additive, esistono ∞^{12} di tali sistemi C_{12}.

4. La condizione necessaria e sufficiente perchè il sistema C colle equazioni (1) sia ortogonale, che cioè si abbia

$$\sum \frac{\partial x}{\partial u_i}\frac{\partial x}{\partial u_j} = 0 \quad (i \neq j = 1, 2, 3),$$

è che $\theta = \Sigma x^2$ sia una soluzione delle (1). Un tale sistema si dirà un sistema O. Se un sistema è O, anche ogni suo parallelo è un sistema O.

Supponiamo di avere un sistema O ed un suo parallelo O′. Se nelle (9) poniamo $\theta' = \Sigma x'^2$ e la corrispondente θ data delle (8), il sistema trasformato C è un sistema O. Si vede facilmente che questa è la trasformazione generalizzata di Ribaucour trattata da Bianchi [1], e in particolare i sistemi paralleli O′ e O'_1 sono in relazione d'inversione, come segue dalle (14).

5. Il Bianchi [2] ha dimostrato che ogni sistema triplo coniugato nello spazio euclideo dà origine ad una infinità di spazî normali, pei quali le direzioni principali sono tangenti alle curve parametriche. Quindi i risultati precedenti conducono a trasformazioni degli spazî normali.

[1] Questi Rendiconti serie 5ª, vol. 34 (1915) p. 161.
[2] Annali, serie 3ª, vol. 23 (1914) p. 141.