ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA NAZIONALE

DEI LINCEI

ANNO CCCXVIII.

1921

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXX.

2° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1921

Matematica. — *Su di una classe di equazioni alle derivate funzionali.* Nota I di FRANCESCO TRICOMI, presentata dal Socio V. VOLTERRA [1].

1. Nella teoria delle funzioni di linee si presentano, oltre alle equazioni integrali ed integro-differenziali, delle altre equazioni, di un carattere più elevato, che il prof. Volterra [2] ha chiamato *equazioni alle derivate funzionali*. Queste equazioni possono riguardarsi come caso limite per $n \to \infty$ delle equazioni a derivate parziali con n variabili indipendenti; pertanto esse potranno trattarsi con metodi ottenuti estendendo opportunamente quelli che si adoperano per le equazioni differenziali. Nella presente Nota e in un'altra che seguirà mi permetto di mostrare appunto come, generalizzando il così detto *primo metodo di Jacobi* per la integrazione delle equazioni a derivate parziali del prim'ordine e giovandosi della feconda teoria delle equazioni integrali, si pervenga all'integrazione di una classe molto generale di equazioni *quadratiche* alle derivate funzionali del prim'ordine.

2. Sia V una funzione incognita della linea $[x]$ (nel senso di Volterra) e della variabile numerica z, e sia $[p]$ la linea definita dalla condizione che la sua ordinata in un punto qualsiasi ξ dell'intervallo (a, b) in cui si suppone data $[x]$, sia uguale al valore della derivata prima di V rispetto alla linea $[x]$, presa nel punto ξ. Allora una relazione del tipo

$$(1) \qquad \frac{\partial V}{\partial z} + H(z, [x], [p]) = 0$$

dove H è una funzione regolare, assegnata di z, $[x]$ e $[p]$, sarà una di quelle equazioni alle derivate funzionali di cui poc'anzi si diceva.

L'equazione (1) si è presentata al prof. Volterra [3] studiando un sistema integro-differenziale importante che può scriversi sotto la forma

$$(2) \qquad \frac{\partial [x](\xi)}{\partial z} = H'_{[p](\xi)}(z, [x], [p]) \,, \quad \frac{\partial [p](\xi)}{\partial z} = -H'_{[x](\xi)}(z, [x], [p])$$
$$(a \leq \xi \leq b)\,,$$

convenendo d'indicare coi simboli $H'_{[p](\xi)}$ e $H'_{[x](\xi)}$ le derivate prime della

[1] Presentata nella seduta del 2 maggio 1921.

[2] *Leçons sur les fonctions de lignes* (Paris, Gauthier-Villars, 1913), pag. 61.

[3] *Equazioni integro-differenziali ed equazioni alle derivate funzionali* [Rendic. R. Acc. dei Lincei, serie 5ª, vol. 23_1 (1° sem. 1914)].

funzione H prese ordinatamente rispetto alla linea $[p]$ e al punto ξ e rispetto alla linea $[x]$ e al punto ξ. Nel sistema (2) le incognite sono le due linee $[x]$ e $[p]$ che si riguardano dipendenti dalla variabile z; in altri termini le incognite sono le due funzioni ordinarie a due variabili

$$\varphi(\xi, z) = [x](\xi) \quad \text{e} \quad \psi(\xi, z) = [p](\xi).$$

Propriamente il Volterra ha dimostrato come, conoscendo una soluzione V della (1) contenente una linea arbitraria (e che perciò potrà chiamarsi un *integrale completo* dell'equazione), sia possibile risolvere agevolmente il sistema (2).

È però facile vedere che anche la reciproca di questa proposizione è vera, e cioè che *se è possibile determinare una soluzione del sistema* (2) *della forma*

$$(3) \qquad [x](\xi) = \varphi(\xi, z, [a], [b]) \quad , \quad [p](\xi) = \psi(\xi, z, [a], [b]),$$

dove $[a]$ e $[b]$ sono due linee arbitrarie aventi il significato di valori iniziali di $[x]$ e $[p]$ per z uguale ad un certo z_0, e se inoltre la funzione φ è tale che la prima delle (3) *possa risolversi rispetto a $[b]$; allora la funzione*

$$(4) \qquad V(z, [x], [a]) = \int_a^b [a](\xi)\, [b](\xi)\, d\xi +$$

$$+ \int_{z_0}^{z} \left\{ \int_a^b H'_{[p](\xi)}(z, [x], [p])\, [p](\xi)\, d\xi - H(z, [x], [p]) \right\} dz,$$

nella cui espressione devono pensarsi sostituiti alle linee $[p]$ e $[b]$ i loro valori tratti dalle (3), *fornirà un integrale completo della* (1).

La dimostrazione è un'ovvia generalizzazione di quella che serve nella teoria delle equazioni a derivate parziali per istabilire il primo metodo di Jacobi [1], e noi la ometteremo per brevità.

3. In una sua Nota [2], il prof. Volterra ha risoluto l'equazione (1), per mezzo di una serie di potenze di composizione, in un caso che corrisponde a quello di H funzione bilineare, cioè della forma

$$H = \int_a^b \int_a^b E(\eta, \zeta)\, [x](\eta)\, [p](\zeta)\, d\eta\, d\zeta.$$

Noi ci proponiamo di mostrare come, avvalendosi invece del teorema enunciato nel § precedente e della teoria delle equazioni integrali, sia possibile

[1] Cfr. p. es. Goursat, *Leçons sur l'intégr. des éq. aux dérivées partielles du premier ordre* (Paris, Hermann, 1891), pag. 136.

[2] *Sulle equazioni alle derivate funzionali* [Rendic. R. Acc. dei Lincei, serie 5ª, vol. 23_1 (1° sem. 1914)].

risolvere l'equazione in discorso anche nel caso che H sia una funzione quadratica di tipo generale, cioè abbia la forma

$$\text{(5)}\quad \mathrm{H}=\mathrm{A}(z)+\int_a^b\left\{\mathrm{B}_1(\eta,z)\,[x](\eta)+\mathrm{B}_2(\eta,z)\,[p](\eta)\right\}d\eta+\int_a^b\int_a^a\times$$

$$\times\left\{\mathrm{C}_1(\eta,\zeta)[x](\eta)[x](\zeta)+\mathrm{C}_2(\eta,\xi)[x](\eta)[p](\zeta)+\mathrm{C}_3(\eta,\zeta)[p](\eta)[p](\zeta)\right\}d\eta\,d\zeta$$

dove $\mathrm{A}, \mathrm{B}_1, \ldots \mathrm{C}_3$ sono certe funzioni assegnate.

Nel caso in esame il sistema (2) diviene

$$\text{(6)}\quad\begin{cases}\dfrac{\partial[x](\xi)}{\partial z}=\mathrm{B}_2(\xi,z)+\displaystyle\int_a^b\left\{\mathrm{C}_2(\eta,\xi)\,[x](\eta)+2\mathrm{C}_3(\eta,\xi)\,[p](\eta)\right\}d\eta,\\[2ex] \dfrac{\partial[p](\xi)}{\partial z}=-\mathrm{B}(\xi,z)-\displaystyle\int_a^b\left\{2\mathrm{C}_1(\eta,\xi)\,[x](\eta)+\mathrm{C}_2(\eta,\xi)\,[p](\eta)\right\}d\eta;\\[1ex] (a\leq\xi\leq b),\end{cases}$$

che, con un artificio perfettamente simile a quello che si adopera per risolvere i sistemi di equazioni integrali [1], e supponendo inoltre, per comodità, $a=0$, $b=\frac{1}{2}$, può porsi sotto la forma dell'equazione integro-differenziale unica

$$\text{(7)}\quad \frac{\partial\Phi(\xi,z)}{\partial z}=\alpha(\xi,z)+\int_0^1\mathrm{K}(\xi,\eta)\,\Phi(\eta,z)\,d\eta,\quad(0\leq\xi\leq1),$$

dove α e K sono funzioni note e la funzione incognita $\Phi(\xi,z)$ è uguale ad $[x](\xi)$ per $(0\leq\xi<\frac{1}{2})$ ed uguale invece a $[p](\xi)$ per $(\frac{1}{2}<\xi\leq1)$.

4. Per risolvere l'equazione integro-differenziale (7), al che è ora ridotta tutta la questione, ci avvarremo del metodo che si ottiene con un passaggio al limite per $n\to\infty$ da quello che si adopera per integrare un sistema di n equazioni differenziali simultanee del tipo

$$d\varphi_i(z)/dz=\alpha_i(z)+k_{i1}\,\varphi_1(z)+k_{i2}\,\varphi_2(z)+\cdots+k_{in}\,\varphi_n(z),\quad(i=1,2,\ldots n),$$

sistema di cui l'equazione (7) è il caso limite per $n\to\infty$. Cerchiamo dunque di soddisfare la (7) ponendo

$$\text{(8)}\quad \int_0^1 f(\eta)\,\Phi(\eta,z)\,d\eta=e^{kz}-\varrho(z)$$

dove f e ϱ sono due funzioni e k una costante da determinarsi.

Moltiplicando la (7) per $f(\xi)\,d\xi$, integrando fra 0 ed 1 e tenendo conto della (8) si ha

$$\int_0^1\Phi(\eta,z)\left\{f(\eta)-\frac{1}{k}\int_0^1\mathrm{K}(\xi,\eta)\,f(\xi)\,d\xi\right\}d\eta+\varrho(z)-$$

$$-\frac{1}{k}\frac{d\varrho(z)}{dz}-\frac{1}{k}\int_0^1 f(\xi)\,\alpha(\xi,z)\,d\xi=0;$$

[1] Cfr. p. es. Vivanti, *Elementi della teoria delle equazioni integrali lineari* (Milano, Hoepli, 1916), pag. 278.

ma quest'uguaglianza dovrà essere verificata identicamente, dunque dovrà essere

(9) $$f(\eta)-\frac{1}{k}\int_0^1 \mathrm{K}(\xi,\eta)\,f(\xi)\,d\xi=0\quad,\quad \frac{d\varrho}{dz}-k\varrho=-\int_0^1 f(\xi)\,\alpha(\xi,z)\,d\xi\,.$$

La prima di queste due formule si interpetra immediatamente nella teoria delle equazioni integrali di Fredholm: essa ci dice che $1/k$ *ed* $f(\xi)$ *devono essere un parametro ed una corrispondente funzione parametrica associata del nucleo* $\mathrm{K}(\xi,\eta)$. Quanto all'altra, essa ci consente di calcolare facilmente la funzione ϱ fissati che siano k ed f, e precisamente si trova

(10) $$\varrho(z)=\mathrm{C}\,e^{kz}-\int_0^1 f(\xi)\,\gamma(\xi,z)\,d\xi$$

avendo indicato con C una costante arbitraria ed avendo posto

(11) $$\gamma(\xi,z)=e^{kz}\int_0^z \alpha(\xi,z)\,e^{-kz}\,dz\,.$$

Matematica. — *Sopra alcuni sviluppi in serie.* Nota II di Pia Nalli, presentata dal Corrisp. Giuseppe Bagnera [1].

4. Passiamo ora a dimostrare quanto abbiamo asserito al n. 3 sulla rappresentazione di una funzione $f(x)$ analitica regolare all'interno di un cerchio C con centro nell'origine.

Si ha

$$|u_n(x)|\leq u_n(|x|)\leq u_0(|x|)\,|x|^n.$$

Intanto, se ϱ è minore del raggio di C, si potrà fissare una costante A tale da avere, per qualunque n,

$$|f^{(n)}(0)|<\mathrm{A}\,\frac{n!}{\varrho^n}\,.$$

Fisseremo poi una costante B tale da avere, per qualunque n,

$$\frac{\alpha^n}{(1-\alpha)(1-\alpha^2)\dots(1-\alpha^n)}<\mathrm{B}\,,$$

e perciò, definendo a_n per mezzo delle (2), sarà

$$|a_n|<\frac{\mathrm{AB}}{n!}\left(\frac{n!}{\varrho^n}+\frac{(n-1)!}{\varrho^{n-1}}+\cdots+1\right);$$

quindi, per n sufficientemente grande,

$$|a_n|<\frac{\mathrm{AB}}{n!}(n+1)\frac{n!}{\varrho^n}=\mathrm{AB}\,\frac{n+1}{\varrho^n}\,,$$

[1] Pervenuta all'Accademia il 9 settembre 1921.