ATTI
DELLA
REALE ACCADEMIA NAZIONALE
DEI LINCEI
ANNO CCCXVIII.
1921

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXX.

2° Semestre.

ROMA
TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI
PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1921

ma quest'uguaglianza dovrà essere verificata identicamente, dunque dovrà essere

$$(9) \qquad f(\eta)-\frac{1}{k}\int_0^1 \mathrm{K}(\xi,\eta)\,f(\xi)\,d\xi=0 \quad , \quad \frac{d\varrho}{dz}-k\varrho=-\int_0^1 f(\xi)\,\alpha(\xi,z)\,d\xi .$$

La prima di queste due formule si interpetra immediatamente nella teoria delle equazioni integrali di Fredholm: essa ci dice che $1/k$ *ed* $f(\xi)$ *devono essere un parametro ed una corrispondente funzione parametrica associata del nucleo* $\mathrm{K}(\xi,\eta)$. Quanto all'altra, essa ci consente di calcolare facilmente la funzione ϱ fissati che siano k ed f, e precisamente si trova

$$(10) \qquad \varrho(z)=\mathrm{C}\,e^{kz}-\int_0^1 f(\xi)\,\gamma(\xi,z)\,d\xi$$

avendo indicato con C una costante arbitraria ed avendo posto

$$(11) \qquad \gamma(\xi,z)=e^{kz}\int_0^z \alpha(\xi,z)\,e^{-kz}\,dz .$$

Matematica. — *Sopra alcuni sviluppi in serie.* Nota II di PIA NALLI, presentata dal Corrisp. GIUSEPPE BAGNERA [1].

4. Passiamo ora a dimostrare quanto abbiamo asserito al n. 3 sulla rappresentazione di una funzione $f(x)$ analitica regolare all'interno di un cerchio C con centro nell'origine.

Si ha

$$|u_n(x)|\leq u_n(|x|)\leq u_0(|x|)\,|x|^n .$$

Intanto, se ϱ è minore del raggio di C, si potrà fissare una costante A tale da avere, per qualunque n,

$$|f^{(n)}(0)|<\mathrm{A}\,\frac{n!}{\varrho^n} .$$

Fisseremo poi una costante B tale da avere, per qualunque n,

$$\frac{\alpha^n}{(1-\alpha)(1-\alpha^2)\dots(1-\alpha^n)}<\mathrm{B} ,$$

e perciò, definendo a_n per mezzo delle (2), sarà

$$|a_n|<\frac{\mathrm{AB}}{n!}\left(\frac{n!}{\varrho^n}+\frac{(n-1)!}{\varrho^{n-1}}+\cdots+1\right);$$

quindi, per n sufficientemente grande,

$$|a_n|<\frac{\mathrm{AB}}{n!}(n+1)\frac{n!}{\varrho^n}=\mathrm{AB}\,\frac{n+1}{\varrho^n} ,$$

[1] Pervenuta all'Accademia il 9 settembre 1921.

e perciò

$$|a_n u_n(x)| < \mathrm{AB}\, u_0(|x|)\,(n+1)\left(\frac{|x|}{\varrho}\right)^n ;$$

quindi la serie $a_0 u_0(x) + a_1 u_1(x) + \cdots$ converge uniformemente in qualunque regione interna al cerchio di raggio ϱ concentrico a C, e rappresenta evidentemente la $f(x)$.

5. Le serie di funzioni u presentano una grande analogia con le serie di potenze e si riducono a queste ultime se $\alpha = 0$.

Dallo sviluppo di una funzione $f(x)$ si può ottenere subito quello della sua derivata; ed infatti, se

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n u_n(x),$$

derivando termine a termine e tenendo conto della (7), troviamo

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[(n+1)\, a_{n+1} + (-1)^n \frac{\alpha^{n+1}}{(1-\alpha)\dots(1-\alpha^{n+1})} \frac{a_0}{n!} \right] u_n(x).$$

Dallo sviluppo di $f(x)$ si può ottenere quello di una sua funzione integrale $\mathrm{F}(x)$:

$$\mathrm{F}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{a_{n-1}}{n} + (-1)^n \frac{\alpha^n}{(1-\alpha)\dots(1-\alpha^n)} \frac{\mathrm{F}(0)}{n!} \right] u_n(x).$$

Così dalla (6) otteniamo

$$x^m = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\alpha^n}{(1-\alpha)\dots(1-\alpha^n)} \cdot \frac{u_{n+m}(x)}{(n+m)!}.$$

6. Quando è noto lo sviluppo di $f(x)$, si ottiene quello della funzione $\mathrm{S}[f(x)]$, dove S è l'operazione funzionale definita al n. 1, moltiplicando i coefficienti di $f(x)$ ordinatamente per $1, \alpha, \alpha^2, \dots$.

Infatti

$$\mathrm{S}\left[\sum_{n=0}^{\infty} a_n u_n(x)\right] = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \mathrm{S}[u_n(x)] = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \alpha^n u_n(x).$$

Viceversa, conosciuto lo sviluppo di $\mathrm{S}[f(x)]$, si trova quello di $f(x)$ dividendo i coefficienti del primo rispettivamente per $1, \alpha, \alpha^2, \dots$.

Così si ha un altro metodo per trovare lo sviluppo di e^{-x}. Essendo $\mathrm{S}[e^{-x}] = 1$, dalla (6) otteniamo subito la (9).

Così ancora, essendo

$$\mathrm{S}\left[\frac{1}{1-\alpha} e^{-\frac{x}{\alpha}} - \frac{\alpha}{1-\alpha} e^{-x}\right] = e^{-x},$$

dalla (9) possiamo formare subito lo sviluppo di $\frac{1}{1-\alpha} e^{-\frac{x}{\alpha}} - \frac{\alpha}{1-\alpha} e^{-x}$, e perciò quello di $e^{-\frac{x}{\alpha}}$.

Si trova così

$$e^{-\frac{x}{\alpha}} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1-\alpha+\alpha^{n+1}}{\alpha^n(1-\alpha)\ldots(1-\alpha^n)} \cdot \frac{u_n(x)}{n!}\,.$$

7. Lo sviluppo di $e^{-\frac{x}{\alpha}}$ si può anche ottenere con un metodo generale che permette di trovare lo sviluppo di $f\left(\frac{x}{\alpha}\right)$ quando è noto quello di $f(x)$.

Si ha

$$(10)\qquad u_n(x) = \frac{1}{\alpha^n}\left(u_n(\alpha x) + \int_0^{\alpha x} u_n(s)\,ds\right) = \frac{1}{\alpha^n}\left(u_n(\alpha x) + \frac{u_{n+1}(\alpha x)}{n+1}\right)$$

e, cambiando x in $\frac{x}{\alpha}$,

$$u_n\left(\frac{x}{\alpha}\right) = \frac{1}{\alpha^n}\left(u_n(x) + \frac{u_{n+1}(x)}{n+1}\right)$$

e perciò, se $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, u_n(x)$,

$$f\left(\frac{x}{\alpha}\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{a_n}{\alpha^n} + \frac{a_{n-1}}{n\alpha^{n-1}}\right) u_n(x)\,.$$

Servendoci di questa formula ne possiamo ottenere un'altra che dà lo sviluppo di $f(\alpha x)$. Se denotiamo con $b_0, b_1, b_2, \ldots$ i coefficienti dello sviluppo di $f(\alpha x)$, si deve avere

$$a_0 = b_0$$

$$a_n = \frac{b_n}{\alpha^n} + \frac{b_{n-1}}{n\alpha^{n-1}} \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

e da questa si ricava

$$b_n = \frac{\alpha^n}{n!}\left[n!\,a_n - (n-1)!\,a_{n-1} + \cdots + (-1)^n a_0\right],$$

cioè

$$(11)\qquad f(\alpha x) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n\left[n!\,a_n - (n-1)!\,a_{n-1} + \cdots + (-1)^n a_0\right] \cdot \frac{u_n(x)}{n!}\,.$$

In particolare si ha

$$u_m(\alpha x) = m!\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \alpha^{n+m} \cdot \frac{u_{n+m}(x)}{(n+m)!}\,.$$

8. Applicando i risultati dei tre ultimi numeri, possiamo trovare lo sviluppo di $x^m e^{-x}$ con m intero e positivo.

Per $m = 1$ si ha

$$\mathrm{S}[x\,e^{-x}] = -e^{-\alpha x} + 1\,;$$

quindi, dopo avere trovato con la (11) lo sviluppo di $e^{-\alpha x}$, potremo formare quello del primo membro ed in seguito quello di $x e^{-x}$. Troviamo così

$$x e^{-x} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \left[1 + \frac{1}{1-\alpha} + \frac{1}{(1-\alpha)(1-\alpha^2)} + \cdots \right.$$
$$\left. \cdots + \frac{1}{(1-\alpha) \cdots (1-\alpha^{n-1})} \right] \frac{u_n(x)}{n!} .$$

Per $m = 2$, abbiamo

$$S[x^2 e^{-x}] = 2 \int_0^{\alpha x} s e^{-s} ds ;$$

conoscendo già lo sviluppo di $x e^{-x}$, possiamo formare quello di $\int_0^x s e^{-s} ds$, poi quello di $\int_0^{\alpha x} s e^{-s} ds$ e perciò quello di $x^2 e^{-x}$; troviamo così

$$x^2 e^{-x} = 2 \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n+2} \left[n-1 + \frac{n-2}{1-\alpha} + \frac{n-3}{(1-\alpha)(1-\alpha^2)} + \cdots \right.$$
$$\left. \cdots + \frac{1}{(1-\alpha) \cdots (1-\alpha^{n-2})} \right] \frac{u_n(x)}{n!} .$$

Facilmente si trova in generale

$$x^m e^{-x} = m! \sum_{n=m}^{\infty} (-1)^{n+m} \left[\binom{n-1}{m-1} + \binom{n-2}{m-2} \frac{1}{1-\alpha} + \right.$$
$$\left. + \binom{n-3}{m-1} \frac{1}{(1-\alpha)(1-\alpha^2)} + \cdots + \binom{m-1}{m-1} \frac{1}{(1-\alpha) \cdots (1-\alpha^{n-m})} \right] \frac{u_n(x)}{n!} .$$

9. Abbiamo trovato lo sviluppo di $x e^{-x}$ con un metodo particolare. Ora esporremo un metodo che permette di trovare lo sviluppo di $x f(x)$ quando è noto quello di $f(x)$. Ci occorre a questo scopo lo sviluppo di $x u_n(x)$. Questa funzione si annulla per $x = 0$ insieme con le sue prime n derivate: quindi il suo sviluppo comincia col termine in u_{n+1} ed il primo coefficiente è l'unità, come facilmente si vede. Il coefficiente a_{n+k} di u_{n+k} si calcola nel seguente modo:

Si ha

$$S[x u_n(x)] = \alpha x u_n(\alpha x) + \int_0^{\alpha x} s u_n(s) ds =$$
$$= \alpha x u_n(\alpha x) + \frac{\alpha x u_{n+1}(\alpha x)}{n+1} - \frac{1}{n+1} \int_0^{\alpha x} u_{n+1}(s) ds ,$$

e, per la (10),

$$S[x u_n(x)] = \alpha^{n+1} x u_n(x) - \frac{u_{n+2}(\alpha x)}{(n+1)(n+2)} .$$

Al primo membro il coefficiente di u_{n+k} è $\alpha^{n+k} a_{n+k}$, nella prima parte del secondo membro è $\alpha^{n+1} a_{n+k}$, nella seconda parte è $-(-1)^k n! \frac{\alpha^{n+k}}{(n+k)!}$;

sarà dunque

$$\alpha^{n+k}\, a_{n+k} = \alpha^{n+1}\, a_{n+k} - (-1)^k \frac{n\,!}{(n+k)\,!}\, \alpha^{n+k}.$$

Da questa ricaviamo a_{n+k} e troviamo

$$x\, u_n(x) = u_{n+1}(x) + n\,! \sum_{k=2}^{\infty} (-1)^k \frac{\alpha^{k-1}}{1-\alpha^{k-1}} \cdot \frac{u_{n+k}(x)}{(n+k)\,!}.$$

10. Servendoci di questa formola, avremmo potuto trovare lo sviluppo di $x e^{-x}$, ma i coefficienti si sarebbero presentati in forma meno semplice di quella ottenuta al numero precedente.

La stessa osservazione si può fare relativamente allo sviluppo di $x^2 u_n(x)$. Invece di ottenerlo da quello di $x u_n(x)$ moltiplicandolo per x, procederemo nel seguente modo:

Abbiamo

$$\mathrm{S}[x^2 u_n(x)] = \alpha^{n+2}\, x^2 u_n(x) - \frac{2}{n+1} \int_0^{\alpha x} s\, u_{n+1}(s)\, ds.$$

Chiamando a_{n+k} il coefficiente di u_{n+k} nello sviluppo di $x^2 u_n(x)$, si ha $a_{n+2} = 1$, ed $a_{n+k} = 0$ per $k < 2$.

Per $k \geq 3$ il coefficiente di u_{n+k} nel primo membro dell'ultima eguaglianza è $\alpha^{n+k} a_{n+k}$, nella prima parte del secondo membro è $\alpha^{n+2} a_{n+k}$, e facilmente si calcola il coefficiente analogo nella seconda parte del secondo membro. Infatti si ha

$$x\, u_{n+1}(x) = u_{n+2}(x) + (n+1)\,! \sum_{k=2}^{\infty} (-1)^k \frac{\alpha^{k-1}}{1-\alpha^{k-1}} \cdot \frac{u_{n+k+1}(x)}{(n+k+1)\,!}$$

e perciò

$$\int_0^{x} s\, u_{n+1}(s)\, ds = \frac{u_{n+3}(x)}{n+3} + (n+1)\,! \sum_{k=4}^{\infty} (-1)^k \frac{\alpha^{k-3}}{1-\alpha^{k-3}} \frac{u_{n+k}(x)}{(n+k)\,!};$$

quindi in $\int_0^{\alpha x} s\, u_{n+1}(s)\, ds$ il coefficiente di $u_{n+k}(x)$ è

$$(-1)^k \frac{(n+1)\,!}{(n+k)\,!}\, \alpha^{n+k} \left(\frac{\alpha^{k-3}}{1-\alpha^{k-3}} + \frac{\alpha^{k-4}}{1-\alpha^{k-4}} + \cdots + \frac{\alpha}{1-\alpha} - n - 2 \right).$$

Possiamo così calcolare a_{n+k} e troviamo

$$x^2 u_n(x) = u_{n+2}(x) + 2n\,! \sum_{k=3}^{\infty} (-1)^k \frac{\alpha^{k-2}}{1-\alpha^{k-2}} \times$$
$$\times \left(\frac{\alpha^{k-3}}{1-\alpha^{k-3}} + \frac{\alpha^{k-4}}{1-\alpha^{k-4}} + \cdots + \frac{\alpha}{1-\alpha} - n - 2 \right) \frac{u_{n+k}(x)}{(n+k)\,!}.$$

Con questo metodo non è difficile trovare la formola generale che dà lo sviluppo di $x^m u_n(x)$. Si trova

$$(12)\quad x^m u_n(x) = u_{n+m}(x) + n!\, m! \sum_{k=m+1}^{\infty} (-1)^k \frac{\alpha^{k-m}}{1-\alpha^{k-m}} \mathrm{H}_{n,k}^{(m)} \frac{u_{n+k}(x)}{(n+k)!}$$

dove è

$$\mathrm{H}_{n,k}^{(m)} = \mathrm{P}_{m-1,k}^{(m)} - \binom{n+m}{1} \mathrm{P}_{m-2,k}^{(m)} + \binom{n+m}{2} \mathrm{P}_{m-3,k}^{(m)} -$$
$$- \cdots + (-1)^{m-2} \binom{n+m}{m-2} \mathrm{P}_{1,k}^{(m)} + (-1)^{m-1} \binom{n+m}{m-1}$$

dove con $\mathrm{P}_{r,k}^{(m)}$ denotiamo la somma dei prodotti di r fattori distinti scelti tra le quantità

$$\frac{\alpha}{1-\alpha}, \frac{\alpha^2}{1-\alpha^2}, \ldots, \frac{\alpha^{k-m-1}}{1-\alpha^{k-m-1}}.$$

Per mezzo della (12) si può formare lo sviluppo del prodotto di due funzioni quando è dato lo sviluppo di una in serie di funzioni $u(x)$ e quello dell'altra in serie di potenze di x.

Matematica. — *Nuova dimostrazione della necessità della condizione di Jacobi.* Nota di M. Picone, presentata dal Socio L. Bianchi [1].

Sia D un dominio del piano (x, y) e T l'insieme di punti costituito da tutti i punti dello spazio (x, y, z) aventi per proiezione, sul detto piano, punti di D. Sia $f(x, y, z)$ una funzione delle tre variabili x, y, z, definita in T, ivi continua con tutte le sue derivate parziali dei primi tre ordini.

Siano $\mathrm{P}_1(x_1, y_1)$ e $\mathrm{P}_2(x_2, y_2)$ due punti interni di D e $y = y_0(x)$ una curva estremale per l'integrale

$$\mathrm{J}(y) = \int_{x_1}^{x_2} f(x, y, y')\, dx,$$

la quale passi per i punti P_1 e P_2 e stia completamente nell'interno di D. Si ponga

$$f_{yy}[x, y_0(x), y_0'(x)] = \mathrm{P}(x), \quad f_{yy'}[x, y_0(x), y_0'(x)] = \mathrm{Q}(x), \quad \frac{d\mathrm{Q}}{dx} - \mathrm{P} = \mathrm{A}(x).$$
$$f_{y'y'}[x, y_0(x), y_0'(x)] = \mathrm{R}(x),$$

e facciamo l'ipotesi che, in tutto l'intervallo (x_1, x_2), riesca $\mathrm{R}(x) \neq 0$.

[1] Presentata nella seduta del 3 aprile 1921.