ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA NAZIONALE

DEI LINCEI

ANNO CCCXVIII.

1921

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXX.

2° Semestre.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1921

Con questo metodo non è difficile trovare la formola generale che dà lo sviluppo di $x^m u_n(x)$. Si trova

$$(12) \quad x^m u_n(x) = u_{n+m}(x) + n!\, m! \sum_{k=m+1}^{\infty} (-1)^k \frac{\alpha^{k-m}}{1-\alpha^{k-m}} \mathrm{H}_{n,k}^{(m)} \frac{u_{n+k}(x)}{(n+k)!}$$

dove è

$$\mathrm{H}_{n,k}^{(m)} = \mathrm{P}_{m-1,k}^{(m)} - \binom{n+m}{1} \mathrm{P}_{m-2,k}^{(m)} + \binom{n+m}{2} \mathrm{P}_{m-3,k}^{(m)} - \\ - \cdots + (-1)^{m-2} \binom{n+m}{m-2} \mathrm{P}_{1,k}^{(m)} + (-1)^{m-1} \binom{n+m}{m-1}$$

dove con $\mathrm{P}_{r,k}^{(m)}$ denotiamo la somma dei prodotti di r fattori distinti scelti tra le quantità

$$\frac{\alpha}{1-\alpha}, \frac{\alpha^2}{1-\alpha^2}, \ldots, \frac{\alpha^{k-m-1}}{1-\alpha^{k-m-1}}.$$

Per mezzo della (12) si può formare lo sviluppo del prodotto di due funzioni quando è dato lo sviluppo di una in serie di funzioni $u(x)$ e quello dell'altra in serie di potenze di x.

Matematica. — *Nuova dimostrazione della necessità della condizione di Jacobi.* Nota di M. Picone, presentata dal Socio L. Bianchi [1].

Sia D un dominio del piano (x, y) e T l'insieme di punti costituito da tutti i punti dello spazio (x, y, z) aventi per proiezione, sul detto piano, punti di D. Sia $f(x, y, z)$ una funzione delle tre variabili x, y, z, definita in T, ivi continua con tutte le sue derivate parziali dei primi tre ordini.

Siano $\mathrm{P}_1(x_1, y_1)$ e $\mathrm{P}_2(x_2, y_2)$ due punti interni di D e $y = y_0(x)$ una curva estremale per l'integrale

$$\mathrm{J}(y) = \int_{x_1}^{x_2} f(x, y, y')\, dx,$$

la quale passi per i punti P_1 e P_2 e stia completamente nell'interno di D. Si ponga

$$f_{yy}[x, y_0(x), y_0'(x)] = \mathrm{P}(x), \quad f_{yy'}[x, y_0(x), y_0'(x)] = \mathrm{Q}(x), \quad \frac{d\mathrm{Q}}{dx} - \mathrm{P} = \mathrm{A}(x).$$
$$f_{y'y'}[x, y_0(x), y_0'(x)] = \mathrm{R}(x),$$

e facciamo l'ipotesi che, in tutto l'intervallo (x_1, x_2), riesca $\mathrm{R}(x) \neq 0$.

[1] Presentata nella seduta del 3 aprile 1921.

Indichiamo con Γ l'insieme [a cui appartiene l'estremale $y = y_0(x)$] delle curve $y = y(x)$, contenute in D, per le quali le funzioni $y(x)$ sono finite e continue con le loro derivate prime nell'intervallo (x_1, x_2) e verificano le condizioni

$$(1) \qquad y(x_1) = y_1 \quad , \quad y(x_2) = y_2 .$$

Per il più semplice problema del calcolo delle variazioni si ha allora la seguente condizione di Jacobi:

Condizione necessaria perchè l'estremale $y = y_0(x)$ fornisca, nel campo Γ, un estremo per l'integrale $J(y)$ è che una soluzione, nulla in x_1, dell'equazione differenziale del second'ordine nella u:

$$(2) \qquad \frac{d}{dx}\left(R\frac{du}{dx}\right) + Au = 0 ,$$

si mantenga sempre diversa da zero nell'interno di (x_1, x_2).

La necessità di tale condizione viene dimostrata facendo vedere che, ove essa non si verifichi, è possibile, in un intorno comunque piccolo dell'estremale $y = y_0(x)$, costruire curve $y = y(x)$ dell'insieme Γ per le quali è $J(y) > J(y_0)$ e curve per le quali è $J(y) < J(y_0)$. Nelle costruzioni date finora, almeno per quanto io so, si son sempre dapprima ottenute curve $y = y(x)$, per le quali la funzione $y(x)$ è continua e verifica le (1), ma ha però una derivata discontinua in uno o due punti di (x_1, x_2).

Parmi che abbia interesse il notare, come appunto mi permetto di fare con la Nota presente, una costruzione delle curve $y = y(x)$, ora indicate, con la quale si ottengono assai semplicemente e direttamente curve di Γ, anzi *parecchie famiglie di curve di Γ per le quali le funzioni $y(x)$ sono in (x_1, x_2) finite e continue con le loro derivate dei primi* DUE *ordini.* La costruzione è contenuta, si può dire, in un teorema della mia Tesi d'abilitazione: *Sui valori eccezionali di un parametro da cui dipende un'equazione differenziale lineare ordinaria del second'ordine* [1].

Di ben maggiore interesse è poi il fatto che, considerando le cose dal punto di vista della Nota presente, si arriva, come farò vedere in una Nota futura, ad un'elegante nuova condizione necessaria per un estremo dell'integrale doppio

$$\iint f\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right) dx\, dy .$$

1. Per fissare le idee riterremo che, *in (x_1, x_2), sia sempre* $R(x) > 0$. Supponiamo che non sia verificata la condizione di Jacobi, supponiamo cioè che esista un integrale u della (2) nullo in x_1 e, ulteriormente, in un punto x_1' interno all'intervallo (x_1, x_2). Non potrà allora, com'è ben noto,

[1] Annali della R. Scuola Normale Superiore di Pisa, vol. XI.

essere sempre, in (x_1, x_2), $A(x) \leq 0$, dovrà cioè $A(x)$ prendere in (x_1, x_2) anche valori positivi [1].

Ciò posto, consideriamo l'equazione differenziale del second'ordine

$$\frac{d}{dx}\left(R\frac{du}{dx}\right) + \lambda A u = 0, \tag{3}$$

contenente il parametro λ. Indichiamo con $u(x_1, \lambda)$ quell'integrale di quest'equazione verificante le condizioni iniziali $u(x_1, \lambda) = 0$, $u'(x_1, \lambda) = 1$. In virtù dei risultati ottenuti alle pagine 31 e 32 della citata mia tesi d'abilitazione, poichè la funzione $A(x)$ prende in (x_1, x_2) anche valori positivi, possiamo affermare che:

Esiste una successione, sempre crescente e crescente all'infinito, di valori positivi $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \dots$ per ciascuno dei quali si ha $u(x_2, \lambda_n) = 0$. Posto $u(x, \lambda_n) = u_n(x)$, $n = 0, 1, 2, \dots$, questa funzione $u_n(x)$, che è, per $\lambda = \lambda_n$, la soluzione della (3) verificante le condizioni iniziali $u_n(x_1) = 0$, $u'_n(x_1) = 1$, si annulla in x_1 e in x_2 e, ulteriormente, in n punti distinti nell'interno dell'intervallo (x_1, x_2). Infine, la $u(x, \lambda)$, per i valori di λ verificanti la limitazione $0 \leq \lambda < \lambda_0$, non ha, oltre lo zero x_1, alcun altro punto di zero in (x_1, x_2), per i valori di λ verificanti la limitazione $\lambda_n < \lambda < \lambda_{n+1}$, ha, oltre lo zero x_1, $n+1$ zeri distinti nell'interno di (x_1, x_2), ed è diversa da zero in x_2.

Pertanto, se, viceversa, per un valore speciale positivo $\bar{\lambda}$ del parametro λ, la soluzione $u(x, \bar{\lambda})$ ha, oltre lo zero x_1, $n+1$ zeri distinti ($n = 0, 1, 2, \dots$), nell'interno di (x_1, x_2), dovrà risultare $\bar{\lambda} > \lambda_n$.

Notiamo altresì che dall'identità

$$u_n \frac{d}{dx}\left(R\frac{du_n}{dx}\right) + \lambda_n A u_n^2 = 0,$$

integrando sull'intervallo (x_1, x_2), si ottiene

$$\int_{x_1}^{x_2} R\left(\frac{du_n}{dx}\right)^2 dx - \lambda_n \int_{x_1}^{x_2} A u_n^2 \, dx = 0 \qquad (n = 0, 1, 2, \dots), \tag{4}$$

e quindi, poichè $\lambda_n > 0$,

$$\int_{x_1}^{x_2} A u_n^2 \, dx > 0 \qquad (n = 0, 1, 2, \dots). \tag{5}$$

[1] Ed infatti la funzione $v = Ru\frac{du}{dx}$ è nulla in x_1 e in x'_1, mentre se fosse sempre $A(x) \leq 0$ in (x_1, x_2), la v sarebbe non decrescente in (x_1, x_2), poichè

$$\frac{dv}{dx} = \frac{d}{dx}\left(Ru\frac{du}{dx}\right) = R\left(\frac{du}{dx}\right)^2 + u\frac{d}{dx}\left(R\frac{du}{dx}\right) = R\left(\frac{du}{dx}\right)^2 - Au^2 \geq 0.$$

2. Dal teorema ora enunciato andiamo *immediatamente* a dedurre la necessità della condizione di Jacobi. Sia $\eta(x)$ una qualunque funzione finita e continua, in (x_1, x_2), con la sua derivata prima, e sia $\eta(x_1) = \eta(x_2) = 0$, si può sempre determinare un numero positivo ϱ_η tale che, per $|\varepsilon| < \varrho_\eta$, la curva $y = y_0(x) + \varepsilon\eta(x)$ appartenga all'insieme Γ e di più la differenza $J(y_0 + \varepsilon\eta) - J y_0)$ abbia il segno di

$$\delta^2 J = \varepsilon^2 \int_{x_1}^{x_2} \left[P\eta^2 + 2Q\eta \frac{d\eta}{dx} + R\left(\frac{d\eta}{dx}\right)^2 \right] dx =$$

$$= \varepsilon^2 \left[\int_{x_1}^{x_2} R\left(\frac{d\eta}{dx}\right)^2 dx - \int_{x_1}^{x_2} A\eta^2\, dx \right].$$

Indichiamo con ϱ_n ciò che diviene il numero ϱ_η quando si faccia $\eta = u_n(x)$. Per $|\varepsilon| < \varrho_n$, la curva $y = y_0(x) + \varepsilon u_n(x)$ appartiene all'insieme Γ e la differenza $J(y_0 + \varepsilon u_n) - J(y_0)$ ha il segno di

$$\delta^2 J = \varepsilon^2 \left[\int_{x_1}^{x_2} R\left(\frac{du_n}{dx}\right)^2 dx - \int_{x_1}^{x_2} A u_n^2\, dx \right].$$

Supposta non soddisfatta la condizione di Jacobi, poichè allora esiste un integrale della (2) nullo in x_1 e, ulteriormente, in un punto x_1' interno all'intervallo (x_1, x_2), riuscirà $u(x_1, 1) = u(x_1', 1) = 0$ e dovrà perciò essere, in virtù del teorema enunciato al n. precedente, $1 > \lambda_0$. Sia, per fissare le idee, $\lambda_{\nu-1} < 1 \leqq \lambda_\nu$; si avrà allora, in forza delle (4) e (5),

$$\int_{x_1}^{x_2} R\left(\frac{du_n}{dx}\right)^2 dx - \int_{x_1}^{x_2} A u_n^2\, dx \begin{cases} < 0, & \text{per } n = 0, 1, 2, \dots, \nu - 1, \\ > 0, & \text{per } n = \nu + 1, \nu + 2, \dots, \end{cases}$$

e quindi

$$J(y_0 + \varepsilon u_n) - J(y_0), \text{ per } |\varepsilon| < \varrho_n, \begin{cases} < 0, & \text{per } n = 0, 1, 2, \dots \nu - 1, \\ > 0, & \text{per } n = \nu + 1, \nu + 2, \dots, \end{cases}$$

la curva $y = y_0(x)$ non potrà dunque fornire un estremo per l'integrale $J(y)$.

Troviamo le ν famiglie di curve di Γ:

$$y = y_0(x) + \varepsilon u_n(x) \;,\; |\varepsilon| < \varrho_n, \quad n = 0, 1, \dots, \nu - 1,$$

continue, dotate in ogni punto di tangente e di curvatura determinate, variabili con continuità, per le quali curve la variazione dell'integrale $J(y)$, relativa al passaggio dalla curva estremale $y = y_0(x)$ ad una qualsiasi di esse, ha sempre segno contrario a quello di $R(x)$ in (x_1, x_2). La curva $y = y_0(x) + \varepsilon u_n(x)$ attraversa l'estremale $y = y_0(x)$ in n punti distinti interni all'arco (P_1, P_2) dell'estremale.