ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

ANNO CCCXVIII.

1921

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXX.

2° Semestre.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1921

MEMORIE E NOTE PRESENTATE DA SOCI

Matematica. — *Sulla teoria generale delle corrispondenze birazionali dello spazio.* Nota III di D. MONTESANO, presentata dal Socio R. MARCOLONGO.

In una corrispondenza birazionale K fra i punti di due spazi S, S′, le *linee fondamentali ordinarie* sono le linee basi dei due sistemi omaloidici di superficie Σ, Ξ' collegati alla corrispondenza; i *punti fondamentali ordinari* sono i punti comuni alle curve collegate alla corrispondenza, alle curve cioè basi variabili dei fasci dei sistemi Σ, Ξ' rispettivamente.

Una curva fondamentale è di 1^a o di 2^a *specie* secondochè nello spazio a cui appartiene è o no incontrata fuori del gruppo dei punti fondamentali dalle curve collegate alla corrispondenza.

Ora nella presente Nota io dimostro il teorema che: *In una corrispondenza birazionale* K *fra i punti di due spazi ordinari* S, S′, *ad ogni curva fondamentale* o *di* 2^a *specie dello spazio* S *si associa una curva fondamentale* o' *di* 2^a *specie dello spazio* S′ *in modo che ad ogni linea* r *che si appoggi alla curva* o *in un punto generico* P *corrisponde nella* K *una linea* r' *che si appoggia alla curva* o' *in un punto* P′ *omologo del punto* P *nella corrispondenza che la* K *determina fra i punti delle due linee omologhe* r, r'. *Se la curva* o *è di ordine* ν *e la curva* o' *è di ordine* ν', *gli ordini di multiplicità della curva* o *per le superficie del sistema* Σ *e della curva* o' *per le superficie del sistema* Ξ' *si ottengono moltiplicando i numeri* ν', ν *per un medesimo numero intero* k.

Cremona ritenne che il numero k fosse sempre eguale ad 1 (1), mentre tale numero può avere un valore arbitrario (2).

Per dimostrare il teorema enunciato occorrono le seguenti considerazioni:

Le superficie del sistema Σ abbiano in comune una curva o, lungo la quale non si tocchino. Fissati ad arbitrio un punto generico P sulla o ed un piano generico τ nel fascio che ha per asse la tangente t nel punto P alla curva, restano determinati nello spazio S una rete Λ costituita dalle

(1) Cremona, *Sulle trasformazioni razionali dello spazio*, n°. 7. *Opere*, tomo 3°, pag. 302.

(2) Cfr. le due prime mie Note *Sulla teoria generale delle corrispondenze birazionali dello spazio* (Rend. di quest'Accademia, vol. XXVII, serie 5a, 1918) e la Nota: *Principio di estensione nella teoria delle corrispondenze birazionali dello spazio* (Rend. Accademia Scienze Napoli, vol. XXVII, 1921).

superficie del sistema Σ che sono tangenti al piano τ nel punto P, e nello spazio S′ un punto L′ centro della stella di piani che nella K corrisponde alla rete Λ.

Col variare del piano τ attorno alla retta t, il punto L′ descrive una curva razionale p'. Ora due casi possono darsi:

1° caso. Variando il punto P sulla curva o, la curva p' varia descrivendo una superficie di ordine x'.

In tale caso è agevole riconoscere che ogni curva generica collegata alla corrispondenza nello spazio S si appoggia alla curva o in x' punti non fondamentali e che perciò la o è linea fondamentale di 1ª specie.

2° caso. Variando il punto P sulla curva o, la curva p' coincide in ogni sua posizione con una curva fissa o'.

In tale caso accadrà necessariamente che ad una stella di piani Λ' dello spazio S′, avente il centro in un punto generico P′ della curva o', corrisponderà nel sistema Σ una rete Λ formata da superficie che in ogni punto generico P della curva o risulteranno tutte tangenti a k piani $\tau_1, \ldots, \tau_k$ del fascio che ha per asse la tangente t nel punto P alla o; e propriamente accadrà che, tenendo fisso il punto P sulla o e facendo variare il punto P′ sulla o', il gruppo di piani $\tau_1, \ldots, \tau_k$ descriverà una involuzione J_P di grado k nel fascio (t), per $k \geq 1$.

Ne segue che un fascio generico Ψ della rete Λ differisce da un fascio Φ del sistema Σ, che non presenti alcuna particolarità, soltanto in questo: che, mentre due superficie generiche del fascio Φ non hanno alcun contatto in un punto generico della curva comune o, accade invece per due superficie generiche del fascio Ψ che k falde dell'una superficie toccano rispettivamente k falde dell'altra lungo la o; e però, se la linea base variabile del fascio Φ è di ordine n', la linea base variabile del fascio Ψ risulta di ordine $n' - k\nu$, se la curva o è di ordine ν.

Corrispondentemente, mentre una retta dello spazio S′, che non presenti alcuna particolarità, incontra una superficie generica del sistema Ξ' in n' punti, accade invece che nella stella (P′), che ha il centro in un punto generico della curva o', una retta generica incontra l'anzidetta superficie soltanto in $n' - k\nu$ punti diversi da P′.

Ciò prova che la o' è linea fondamentale della corrispondenza e che l'ordine di multiplicità della curva per le superficie del sistema Ξ' è $\mu' = k\nu$.

D'altra parte i piani tangenti in un punto generico P della curva o ad una superficie generica del sistema Σ sono tutti e soli i piani dei gruppi della involuzione J_P dovuti alle reti Λ del sistema Σ omologhe delle stelle di piani che hanno i centri nei punti di sezione della curva o' col piano omologo di quella superficie; e però il numero di tali piani è $k\nu'$, se ν' è l'ordine della curva o'.

Ciò equivale a dire che l'ordine di multiplicità della curva o per le superficie del sistema Σ è $\mu = kv'$.

Ulteriormente si assuma nello spazio S' una linea r' che si appoggi alla curva o' in un punto generico P' senza presentare alcun'altra particolarità. Se la linea r' è di ordine x', accadrà che un piano generico dello spazio S' segherà la r' in x' punti, mentre un piano generico della stella (P') la segherà soltanto in $x' - 1$ punti diversi da P'.

Corrispondentemente nello spazio S la linea r omologa della r', mentre sarà segata, fuori del gruppo dei punti e delle linee fondamentali, in x' punti da una superficie generica del sistema Σ, avrà invece in comune, fuori dell'anzidetto gruppo, soltanto $x' - 1$ punti con una superficie generica della rete Λ omologa della stella di piani (P'), e però necessariamente la r si appoggerà alla curva o in un punto P ed in questo punto sarà tangente ad una retta situata in un piano del gruppo $\tau_1, \dots, \tau_k$ dell'involuzione J_P dovuto alla rete Λ. E il punto P sarà l'omologo del punto P' nella corrispondenza che la K determina fra i punti delle linee omologhe r, r'.

Inversamente, ad una linea r dello spazio S, la quale si appoggi alla curva o in un punto generico P senza presentare ulteriori particolarità, corrisponde nello spazio S' una linea r' la quale si appoggia alla curva o' nel punto P centro della stella di piani omologa della rete Λ formata dalle superficie del sistema Σ che nel punto P sono tangenti al piano determinato dalle tangenti in tale punto alle curve o, r. E il punto P' sarà l'omologo del punto P nella corrispondenza che la K determina fra i punti delle linee omologhe r, r'.

Assumendo come linea r' una retta generica dello spazio S' o come linea r una retta generica dello spazio S, si riconosce che ognuna delle curve o, o' non è incontrata fuori del gruppo dei punti fondamentali da una linea generica collegata alla corrispondenza nello spazio a cui la curva appartiene, e che perciò le o, o' sono curve fondamentali di 2ª specie della corrispondenza.

Ne segue che nello spazio S' valgono per la curva o' le proprietà dimostrate per la curva o nello spazio S: vale a dire che ad ogni linea r' dello spazio S', che si appoggi alla o' in un punto generico P', corrisponde nello spazio S una linea r che si appoggia ad una curva fondamentale di 2ª specie o^* in un punto P omologo del punto P' nella corrispondenza che la K determina fra i punti delle due linee. Ma il punto P, per quanto si è detto, è sulla curva o, onde la o^* coincide con la o, sicchè le relazioni che intercedono fra le due curve sono invertibili: cioè ad ogni stella di piani, che abbia il centro in un punto generico P della o, corrisponde nello spazio S' una rete M' del sistema Ξ' formata da superficie che in ogni punto generico P' della o' risultano tutte tangenti ai piani di un gruppo di una involuzione $J_{P'}$ che si ha nel fascio che ha per asse la tangente nel punto P′ alla o'.

Se questa involuzione è di grado k', sarà $\mu = k' \nu'$, sicchè $k' = k$ e ne segue il teorema.

Ai tipi di corrispondenza già da me determinati, che presentano coppie di linee fondamentali di 2ª specie omologhe, per le quali è $k > 1$, aggiungerò il seguente:

Si supponga di avere due monoidi ω, π^* degli ordini $n-1$, n che abbiano in comune il vertice O e p rette generiche $r_1, \ldots, r_p$ della stella (O) multiple per entrambi degli ordini $\varrho_1, \ldots, \varrho_p$ rispettivamente, per $\varrho_i \geq 1$.

In tale caso resta determinato nello spazio S un sistema omaloidico Σ costituito da monoidi $\pi_n = O^{n-1} r_1^{\varrho_1} \ldots r_p^{\varrho_p} c$. Esso è quello che comprende il monoide π^* e la rete degenere Λ costituita dalle superficie che si spezzano nel monoide ω e nei singoli piani della stella (O), sicchè la linea base semplice c del sistema è la linea comune alle superficie ω, π^* diversa dalle $r_1, \ldots, r_p$.

Nel sistema, un fascio generico ha per base variabile una curva piana $c_n \equiv O^{n-1} c^{2(n-1)}$ e la Jacobiana è costituita dal monoide dato $\omega_{n-1} \equiv$ $\equiv O^{n-2} r_1^{\varrho_1} \ldots r_p^{\varrho_p} c$, contato due volte, e dal cono $\gamma_{3(n-1)} \equiv O^{3(n-1)} r_1^{2\varrho_1} \ldots r_p^{2\varrho_p} c$, che dal punto O proietta la c.

In una corrispondenza birazionale K fra gli spazi S, S′ che tragga origine dal sistema Σ, le rette $r_1, \ldots r_p$ che non sono incontrate fuori del punto fondamentale O dalle curve c_n collegate alla corrispondenza nello spazio S, sono linee fondamentali di 2ª specie in tale spazio.

Per averne le omologhe occorre innanzi tutto considerare la stella di piani (O′) dello spazio S′ che corrisponde alla rete degenere Λ. Il punto O′, centro di tale stella, corrisponde nella K al monoide fondamentale ω_{n-1}; mentre i piani e i raggi della stella (O′) corrispondono nella K ai piani ed ai raggi della stella (O) con una omografia Ω ben determinata.

Una linea generica r dello spazio S e la sua omologa r' nell'altro spazio sono proiettate rispettivamente dai punti O, O′ secondo due coni che si corrispondono nella omografia Ω; e propriamente due generatrici omologhe dei due coni proiettano due punti corrispondenti delle due curve.

Perciò, se alle rette $r_1, \ldots, r_p$ della stella (O) corrispondono nella Ω le rette $r'_1, \ldots, r'_p$ della stella (O′), qualora la linea r si appoggi alla retta r_i in un punto P, la linea r' si appoggerà alla retta r'_i in un punto P′ che sarà l'omologo del punto P nella corrispondenza che la K determina fra i punti delle due linee r, r'. Ne segue che le linee fondamentali di 2ª specie dello spazio S′ che corrispondono alle $r_1, \ldots, r_p$, sono le rette $r'_1, \ldots, r'_p$. Inoltre per le rette r_i, r'_i si ha $\nu = \nu' = 1$, sicchè la r'_i è multipla di ordine $\varrho'_i = \varrho_i$ per le superficie del sistema omaloidico Ξ' collegato alla corrispondenza nello spazio S′. E se $\varrho_i > 1$, per le linee omologhe $r_i\,;\,r'_i$ sarà $k = \varrho_i = \varrho > 1$.

Il sistema Ξ' innanzidetto è costituito da monoidi di ordine n aventi il vertice nel punto O′ e comprende una rete degenere, omologa della stella di piani (O), costituita da superficie che si spezzano nei singoli piani della stella (O′) ed in un monoide fisso ω' omologo nella K del punto O′. Perciò il monoide ω' è del tipo: $\omega'_{n-1} \equiv O'^{n-2}\, r_1'^{\varrho_1} \ldots r_p'^{\varrho}$ ed il sistema Ξ' è affatto analogo al sistema Σ, risulta cioè costituito da superficie $\chi'_n \equiv O'^{n-1}\, r_1'^{\varrho_1} \ldots r_p'^{\varrho_p}$ che hanno ulteriormente in comune una linea semplice c' del monoide ω'.

Alle linee fondamentali c, c' corrispondono rispettivamente nella K i due coni fondamentali che proiettano le c', c dai punti O′, O. Questi coni si corrispondono nella omografia Ω in modo che, di due generatrici corrispondenti, l'una nello spazio S o nello spazio S′ corrisponde per intero nella K al punto in cui l'altra si appoggia alla c' o alla c.

Con ciò la corrispondenza K può ritenersi perfettamente nota. Essa comprende come caso particolare quella studiata da De Paolis. [1]

Matematica. — *Sopra alcuni sviluppi in serie.* Nota III di Pia Nalli, presentata dal Corrisp. G. Bagnera [2].

11. Si presenta ora il problema dello sviluppo del prodotto di due funzioni rappresentate entrambe da serie di funzioni $u(x)$.

Occorre per questo lo sviluppo del prodotto $u_n(x)\cdot u_m(x)$. Esso potrebbe ottenersi facendo il prodotto delle due serie di potenze di x che rappresentano $u_n(x)$ ed $u_m(x)$ e sostituendo poi ad ogni potenza di x il suo sviluppo in serie di funzioni u.

Ora esporremo un metodo fondato sopra una formola di ricorrenza, il quale permette di vedere quale è la forma generale dei coefficienti dello sviluppo di $u_n(x)\cdot u_m(x)$.

Tale formola esprime i coefficienti di $u_n^2(x)$ linearmente ed omogeneamente per mezzo dei coefficienti di $u_{n-1}^2(x)$, cosicchè si può dire che i coefficienti di $u_n^2(x)$ si esprimono linearmente ed omogeneamente per mezzo di quelli di $u_0^2(x)$, e lo stesso si può quindi dire dei coefficienti del prodotto $u_n(x)\cdot u_m(x)$, come si intende facilmente quando si pensi alla forma delle derivate dei quadrati delle $u_n(x)$.

La formola che otterremo permette non solo di calcolare i coefficienti dello sviluppo di $u_n^2(x)$ quando si conoscono quelli di $u_{n-1}^2(x)$, ma permette

(1) De Paolis, *Sopra un sistema omaloidico formato da superficie di ordine n con un punto n-1-plo.* Giornale di Matematiche, vol. XIII.

(2) Pervenuta all'Accademia il 9 settembre 1921.