ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

ANNO CCCXVIII.

1921

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXX.

2° Semestre.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1921

Matematica. — *Un'espressione nuova dei numeri bernoulliani.* — Nota di ALBERTO TANTURRI, presentata dal Corrispondente G. PEANO [1].

In questo scritto, servendomi dei risultati della mia Nota: *Determinazione della derivata n^{ma} di $tg\, x$ e di $cot\, x$*, che sarà tra breve pubblicata nel Bollettino di Mat. del Conti, giungo a una nuova espressione dei numeri bernoulliani, più semplice di quelle finora conosciute.

1. Se x è un numero reale, minore, in valore assoluto, di $\pi/2$:

$$\mathrm{tg}\, x = \sum_{1}^{\infty}{}_n\, \beta_n \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!};$$

dove $\beta_n = 2^{2n}(2^{2n}-1)\,\mathrm{B}_n/2n$, con $\mathrm{B}_1 = 1/6$, $\mathrm{B}_2 = 1/30$, $\mathrm{B}_3 = 1/42$, ..., e, in generale, $\mathrm{B}_n = n^{mo}$ numero bernoulliano, secondo la notazione del Binet, adottata, per es., dal *Formulario*, e, più recentemente, dal Dini, nelle sue *Lezioni di analisi ecc.* Lo sviluppo del Maclaurin dà poi che $\beta_n = (\mathrm{D}^{2n-1}\,\mathrm{tg}\, x)_0$, cioè al valore nel punto zero della derivata $(2n-1)^{ma}$ di $\mathrm{tg}\, x$: che, per la Nota citata, scrivendo P_n al posto di $\mathrm{P}_{n+1,n}$, $=$

$$\mathrm{P}_n^0 n^{2n-1} - \mathrm{P}_n^1 (n-1)^{2n-1} + \mathrm{P}_n^2 (n-2)^{2n-1} - \cdots + (-1)^{n-1}\mathrm{P}_n^{n-1};$$

con $\mathrm{P}_n^0 = 1$;

$$\text{e } \mathrm{P}_n^{2\lambda-1} = \sum_{0}^{\lambda-1}{}_k (-1)^k 2^{2\lambda-2k-1}\binom{n-\lambda+k}{k}\binom{n+\lambda-k}{2\lambda-2k-1},$$

$$\text{e } \mathrm{P}_n^{2\lambda} = \sum_{0}^{\lambda-1}{}_k (-1)^k \frac{2^{2\lambda-2k-1}}{\lambda-k}\binom{n-\lambda+k}{k}\binom{n+\lambda-k}{2\lambda-2k-1}(n+1) + (-1)^{\lambda}\binom{n}{\lambda},$$

per $\lambda = 1, 2, 3, \ldots$. Si noti che le tre relazioni scritte posson servire a definire anche P_0^0 come uguale a 1; e $\mathrm{P}_0^1, \mathrm{P}_0^2, \mathrm{P}_0^3, \ldots$, come tutti uguali a 2, perchè, in ogni caso, per $n = 0$, non resta nei secondi membri che il termine della sommatoria corrispondente a $k = \lambda - 1$, e cioè $(-1)^{\lambda-1}\, 2\binom{-1}{\lambda-1}$, che $= 2$; e, finalmente, quando $n = 1, 2, 3, \ldots$, a definire P_n^h, non solo per h da zero a $n-1$, ma anche per tutti i valori superiori dell' intero h. Avrò, per es., che, per $n = 1, 2, 3, \ldots$:

$$\mathrm{P}_n^1 = 2(n+1)\ ;\ \mathrm{P}_n^2 = 2(n+1)^2 - n\ ;\ \mathrm{P}_n^3 = 8\binom{n+2}{3} - 2(n^2-1);$$

$$\mathrm{P}_n^4 = 4\binom{n+2}{3}(n+1) - 2(n^2-1)(n+1) + \binom{n}{2}\ ;\ \ldots\ ;$$

e già queste prime espressioni non hanno, come si vede, veste molto semplice.

[1] Presentata nella seduta del 16 gennaio 1921.

2. Ma nella stessa Nota ho dimostrato che

$$P_{n+1}^h = P_n^{h-2} + 2P_n^{h-1} + P_n^h ,$$

per $n = 1, 2, 3, \ldots$, e $h = 2, 3, 4, \ldots$. Si costruisca, dunque, quel che il Lucas (ved. *Théorie des nombres*, pag. 5) chiama una *tavola di somme*, con questa legge: « nella verticale d'indice zero, che conterrà $P_0^0, P_1^0, P_2^0, \ldots$, si scrivan tutti 1; nell'orizzontale d'indice zero, che conterrà $P_0^0, P_0^1, P_0^2, \ldots$, si scrivan, dopo l'1, tutti 2; nella verticale d'indice 1, che conterrà $P_0^1, P_1^1, P_2^1, \ldots$, si scrivan, dopo il 2, i numeri $4, 6, 8, \ldots$. Poi, se a, b e c son tre numeri consecutivi d'un'orizzontale, si scriva, sotto c, il numero $a + 2b + c$ ». E all'incrocicchio della verticale d'indice h con l'orizzontale d'indice $n + 1$ si troverà il numero P_{n+1}^h.

P (n \ h)	0	1	2	3
0	1	2	2	2
1	1	4	7	8
2	1	6	16	26
3	1	8	29	64

3. Possiam ora osservare che $a + 2b + c = (a + b) + (b + c)$, e comprender quindi la tavola dei P in un'altra di numeri Q, costruita così: « nella prima verticale e nella prima orizzontale tutti 1: poi, se a e b son due numeri consecutivi d'un'orizzontale, scrivo, sotto b, il numero $a + b$ ». Si avrà che $P_n^h = Q_{2n+1}^h$, se così indico il Q che è all'incrocicchio della verticale d'indice h con l'orizzontale d'indice $2n + 1$.

Q (n \ h)	0	1	2	3
0	1	1	1	1
1	1	2	2	2
2	1	3	4	4
3	1	4	7	8
4	1	5	11	15
5	1	6	16	26
6	1	7	22	42
7	1	8	29	64

4. Ma questa tavola dei Q si ottiene dal triangolo aritmetico, sostituendo a ogni numero di esso, compresi gli zeri, la somma del numero che si considera con tutti i precedenti nella stessa orizzontale. Sicchè Q_{2n+1}^h, e quindi anche P_n^h,

$$= \binom{2n+1}{0} + \binom{2n+1}{1} + \cdots + \binom{2n+1}{h};$$

cioè alla somma dei primi $h + 1$ coefficienti dello sviluppo di $(1 + x)^{2n+1}$, per la quale, dice il Lucas, a pag. 62 del libro citato, « il n'existe pas de formule simple ».

5. Ed ecco dunque una semplicissima espressione per i coefficienti β_n. Per $n = 1, 2, 3, \ldots$:

$$\begin{aligned}
\beta_n = {} & \binom{2n+1}{0} \times n^{2n-1} \\
& - \left[\quad \text{»} \quad + \binom{2n+1}{1} \right] \times (n-1)^{2n-1} \\
& + \left[\quad \text{»} \quad + \quad \text{»} \quad + \binom{2n+1}{2} \right] \times (n-2)^{2n-1} \\
& - \ldots\ldots\ldots\ldots \\
& + (-1)^{n-1} \left[\quad \text{»} \quad + \quad \text{»} \quad + \quad \text{»} + \cdots + \binom{2n+1}{n-1} \right] \times 1^{2n-1} \qquad (1).
\end{aligned}$$

E questa stessa espressione dà lo sviluppo d'un determinante, che si può chiamare di Haussner; e che si trova, per es., a pag. 177 dei *Determinanti* del Pascal, e anche (con però qualche errore di stampa) a pag. 489, vol. I, del *Repertorio ecc.* dello stesso Autore, e anche, trasformato in determinante di fattoriali, a principio della Nota: *I nuovi numeri pseudo-tangenziati* (nei Rendiconti del Circ. Matem. di Palermo, 28 aprile 1907), sempre dello stesso Pascal.

6. L'espressione di B_n, di cui parla il titolo di questo scritto, discende per l'appunto dalla (1), moltiplicando per $2n/2^{2n}(2^{2n}-1)$.

7. Possiam anche nella stessa (1) mettere in evidenza i fattori $\binom{2n+1}{0}$, $\binom{2n+1}{1}$, ...; ed esprimere poi le somme $1^{2n-1} - 2^{n-1} + 3^{2n-1} - \dots$ coi numeri del Genocchi, o con quelli del Bernoulli (ved. Lucas, libro citato, pag. 250): avremo così nuove relazioni tra quest'ultimi numeri, le quali qui non scrivo, perchè meno semplici delle molte già note. Per me, mi son fatto ardire d'esibir questo lavoro, con l'idea di richiamar l'attenzione sulla mia Nota citata in principio: non tanto sul suo risultato finale, quanto per le conseguenze che se ne posson trarre. Forse, sia i numeri bernoulliani che gli euleriani (: $E_1 = 1$, $E_2 = 5$, $E_3 = 61$, ...) ammettono espressioni che ci sfuggono per loro stessa semplicità: osserverò solo che *se*, come in quella Nota, *pongo*

$$D^n \operatorname{tg} x = \sum_r \{(2^{r-1} B_{n,r})(2 \operatorname{tg} x)^{n+1-2r} [1 + (\operatorname{tg} x)^2]^r\};$$

cioè, se pongo: $B_{n,1} = 1$, e $B_{1,n+1} = 0$, per ogni numero naturale n,

e $B_{n,r} = (n+2-2r) B_{n-1,r-1} + r B_{n-1,r}$, per n e r interi maggiori di 1; *la somma*, $\sum_r B_{n,r}$, *di tutti i coefficienti* B (lì da me espressi esplicitamente), *relativi alla derivata* n^{ma}, $= \beta_{\frac{n+1}{2}}$ o ad $E_{\frac{n}{2}}$, *secondochè n è dispari o pari*. Ciò si dimostra subito, osservando che $\sec x + \operatorname{tg} x$, e cioè $1 + \beta_1 x + E_1 x^2/2! + \beta_2 x^3/3! + E_2 x^4/4! + \dots, = \operatorname{tg}(x/2 + \pi/4)$: dimodochè $\beta_m = [D^{2m-1} \operatorname{tg}(x/2 + \pi/4)]_0$, ossia, in virtù della mia Nota, a $B_{2m-1,1} + B_{2m-1,2} + \dots + B_{2m-1,m}$; ed $E_m = [D^{2m} \operatorname{tg}(x/2 + \pi/4)]_0$, ossia a $B_{2m,1} + B_{2m,2} + \dots + B_{2m,m}$.