ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA NAZIONALE

DEI LINCEI

ANNO CCCXVIII.

1921

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXX.

2° Semestre.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1921

corrispondenza nello spazio S'. E se $\varrho_i > 1$, per le linee omologhe r_i, r'_i sarà $k = \varrho_i = \varrho > 1$.

Il sistema Ξ' innanzidetto è costituito da monoidi di ordine n aventi il vertice nel punto O' e comprende una rete degenere, omologa della stella di piani (O), costituita da superficie che si spezzano nei singoli piani della stella (O') ed in un monoide fisso ω' omologo nella K del punto O'. Perciò il monoide ω' è del tipo: $\omega'_{n-1} \equiv O'^{n-2} r_1'^{\varrho_1} \dots r_p'^{\varrho}$ ed il sistema Ξ' è affatto analogo al sistema Σ, risulta cioè costituito da superficie $\chi'_n \equiv O'^{n-1} r_1'^{\varrho_1} \dots r_p'^{\varrho_p}$ che hanno ulteriormente in comune una linea semplice c' del monoide ω'.

Alle linee fondamentali c, c' corrispondono rispettivamente nella K i due coni fondamentali che proiettano le c', c dai punti O', O. Questi coni si corrispondono nella omografia Ω in modo che, di due generatrici corrispondenti, l'una nello spazio S o nello spazio S' corrisponde per intero nella K al punto in cui l'altra si appoggia alla c' o alla c.

Con ciò la corrispondenza K può ritenersi perfettamente nota. Essa comprende come caso particolare quella studiata da De Paolis. (1)

Matematica. — *Sopra alcuni sviluppi in serie.* Nota III di Pia Nalli, presentata dal Corrisp. G. Bagnera (2).

11. Si presenta ora il problema dello sviluppo del prodotto di due funzioni rappresentate entrambe da serie di funzioni $u(x)$.

Occorre per questo lo sviluppo del prodotto $u_n(x) \cdot u_m(x)$. Esso potrebbe ottenersi facendo il prodotto delle due serie di potenze di x che rappresentano $u_n(x)$ ed $u_m(x)$ e sostituendo poi ad ogni potenza di x il suo sviluppo in serie di funzioni u.

Ora esporremo un metodo fondato sopra una formola di ricorrenza, il quale permette di vedere quale è la forma generale dei coefficienti dello sviluppo di $u_n(x) \cdot u_m(x)$.

Tale formola esprime i coefficienti di $u_n^2(x)$ linearmente ed omogeneamente per mezzo dei coefficienti di $u_{n-1}^2(x)$, cosicchè si può dire che i coefficienti di $u_n^2(x)$ si esprimono linearmente ed omogeneamente per mezzo di quelli di $u_0^2(x)$, e lo stesso si può quindi dire dei coefficienti del prodotto $u_n(x) \cdot u_m(x)$, come si intende facilmente quando si pensi alla forma delle derivate dei quadrati delle $u_n(x)$.

La formola che otterremo permette non solo di calcolare i coefficienti dello sviluppo di $u_n^2(x)$ quando si conoscono quelli di $u_{n-1}^2(x)$, ma permette

(1) De Paolis, *Sopra un sistema omaloidico formato da superficie di ordine n con un punto n-1-plo*. Giornale di Matematiche, vol. XIII.

(2) Pervenuta all'Accademia il 9 settembre 1921.

di calcolare i coefficienti di una $u_n^2(x)$ qualunque [a cominciare dalla $u_0^2(x)$] per il fatto che il primo coefficiente non nullo in ciascuna delle $u_n^2(x)$ è l'unità.

Per stabilire la formola in discorso, cominceremo con l'osservare che lo sviluppo di $u_n^2(x)$ deve cominciare col termine in $u_{2n}(x)$. Poniamo allora

$$u_n^2(x) = \frac{A_{2n}^{(n)}}{(2n)!} u_{2n}(x) + \frac{A_{2n+1}^{(n)}}{(2n+1)!} u_{2n+1}(x) + \cdots .$$

È chiaro che $A_{2n}^{(n)} = (2n)!$.

Abbiamo poi

$$\alpha^{n-1} u_{n-1}(x) = u_{n-1}(\alpha x) + \frac{1}{n} u_n(\alpha x) .$$

Quadrando i due membri ed integrando tra 0 ed x, otteniamo

$$\alpha^{2n-2} \int_0^x u_{n-1}^2(s)\, ds = \frac{1}{\alpha} \int_0^{\alpha x} u_{n-1}^2(s)\, ds + \frac{2}{n\alpha} \int_0^{\alpha x} u_{n-1}(s)\, u_n(s)\, ds +$$

$$+ \frac{1}{n^2\alpha} \int_0^{\alpha x} u_n^2(s)\, ds = \frac{1}{\alpha} \int_0^{\alpha x} u_{n-1}^2(s)\, ds + \frac{1}{n^2\alpha} u_n^2(\alpha x) + \frac{1}{n^2\alpha} \int_0^{\alpha x} u_n^2(s)\, ds$$

che possiamo anche scrivere

$$S[u_n^2(x)] = n^2 \alpha^{2n-1} \int_0^x u_{n-1}^2(s)\, ds - n^2 \int_0^{\alpha x} u_{n-1}^2(s)\, ds .$$

Nel primo membro il coefficiente di $u_m(x)$ è $A_m^{(n)} \dfrac{\alpha^m}{m!}$; in $\int_0^x u_{n-1}^2(s)\, ds$ il coefficiente di $u_m(x)$ è $\dfrac{A_{m-1}^{(n-1)}}{m!}$, e finalmente in $\int_0^{\alpha x} u_{n-1}^2(s)\, ds$ il coefficiente di $u_m(x)$ è

$$\frac{\alpha^m}{m!} \Big[A_{m-1}^{(n-1)} - A_{m-2}^{(n-1)} + \cdots + (-1)^{m+1} A_{2n-2}^{(n-1)} \Big] .$$

Avremo dunque

$$A_m^{(n)} = n^2 A_{m-1}^{(n-1)} \left(\frac{1}{\alpha^{m-2n+1}} - 1 \right) + n^2 \left(A_{m-2}^{(n-1)} - A_{m-3}^{(n-1)} + \cdots + (-1)^m A_{2n-2}^{(n-1)} \right).$$

Così si vede che le $A^{(n)}$ si esprimono linearmente ed omogeneamente per mezzo delle $A^{(n-1)}$.

La formola ottenuta può servire al calcolo delle $A^{(n)}$ ed ecco in quale modo.

Cambiamo in essa n in $n+1$ ed m in $m+1$:

$$A_{m+1}^{(n+1)} = (n+1)^2 A_m^{(n)} \left(\frac{1}{\alpha^{m-2n}} - 1 \right) + \tag{13}$$
$$+ (n+1)^2 \left(A_{m-1}^{(n)} - A_{m-2}^{(n)} + \cdots + (-1)^{m+1} A_{2n}^{(n)} \right).$$

Noi sappiamo che $A_{2n}^{(n)} = (2n)!$. Calcoliamo ora $A_{2n+1}^{(n)}$. Nella (13) facciamo $m = 2n + 1$: il primo membro diventa $A_{2n+2}^{(n+1)}$ che è eguale a $(2n+2)!$, al secondo membro tutto è noto fuorchè $A_{2n+1}^{(n)}$. Troviamo così

$$A_{2n+1}^{(n)} = (2n)! \, \frac{3n+1}{n+1} \cdot \frac{\alpha}{1-\alpha}.$$

Se in questa cambiamo n in $n+1$, troviamo $A_{2n+3}^{(n+1)}$, ed allora nella (13) facciamo $m = 2n + 2$: tutto sarà noto eccetto $A_{2n+2}^{(n)}$, e troviamo allora

$$A_{2n+2}^{(n)} = (2n)! \left(3 \cdot \frac{3n+2}{n+2} \cdot \frac{\alpha}{1-\alpha} + 1 \right) \frac{\alpha^2}{1-\alpha^2}.$$

Da questa otteniamo $A_{2n+4}^{(n+1)}$ ed allora la (13), dove si faccia $m = 2n + 3$, ci darà

$$A_{2n+3}^{(n)} = (2n)! \left(3 \cdot \frac{9n^3 + 36n^2 + 45n + 14}{(n+1)(n+2)(n+3)} \, \frac{\alpha^2}{1-\alpha^2} \cdot \frac{\alpha}{1-\alpha} + \right.$$
$$\left. + \frac{3n+1}{n+1} \cdot \frac{\alpha^2}{1-\alpha^2} + \frac{3n+1}{n+1} \cdot \frac{\alpha}{1-\alpha} - 1 \right) \frac{\alpha^3}{1-\alpha^3},$$

e così via, si possono ottenere le varie $A^{(n)}$.

Noi non continueremo questa ricerca delle $A^{(n)}$; noteremo solo che $A_{2n+k}^{(n)}$ è il prodotto di $\dfrac{\alpha^k}{1-\alpha^k}$ per un polinomio in

$$\frac{\alpha}{1-\alpha}, \; \frac{\alpha^2}{1-\alpha^2}, \ldots, \frac{\alpha^{k-1}}{1-\alpha^{k-1}}$$

di grado $k-1$ rispetto a tutti gli argomenti e di primo grado rispetto a ciascuno.

Calcolati gli sviluppi delle u_n^2, si possono avere, per mezzo di derivazioni, quelli dei prodotti $u_n \cdot u_m$.

12. Daremo ora lo sviluppo di $u_k(hx)$ con h qualunque.

Si ha

$$u_0(hx) = u_0(h\alpha x) + h \int_0^{\alpha x} u_0(hs)\, ds,$$

cioè

$$u_0(hx) = \mathrm{S}[u_0(hx)] + (h-1)\int_0^{\alpha x} u_0(hs)\, ds. \tag{14}$$

Ponendo $u_0(hx) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \frac{u_n(x)}{n!}$, abbiamo

$$b_0 = 1$$

$$\mathrm{S}[u_0(hx)] = \sum_{n=0}^{\infty} b_n\, \alpha^n \frac{u_n(x)}{n!},$$

$$\int_0^x u_0(hs)\, ds = \sum_{n=1}^{\infty} b_{n-1} \frac{u_n(x)}{n!};$$

e perciò

$$\int_0^{\alpha x} u_0(hs)\, ds = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha^n (b_{n-1} - b_{n-2} + \cdots + (-1)^{n-1} b_0) \frac{u_n(x)}{n!}.$$

Si dovrà dunque avere, eguagliando i coefficienti della stessa u_n nei due membri della (14),

$$\frac{b_n}{n!} = \frac{b_n\, \alpha^n}{n!} + (h-1)(b_{n-1} - b_{n-2} + \cdots + (-1)^{n-1} b_0) \frac{\alpha^n}{n!};$$

cioè

$$b_n = (h-1)(b_{n-1} - b_{n-2} + \cdots + (-1)^{n-1} b_0) \frac{\alpha^n}{1-\alpha^n}.$$

Facilmente si trova

$$b_n = \left[(h-1)\frac{\alpha}{1-\alpha} - 1\right] \times$$

$$\times \left[(h-1)\frac{\alpha^2}{1-\alpha^2} - 1\right] \cdots \left[(h-1)\frac{\alpha^{n-1}}{1-\alpha^{n-1}} - 1\right](h-1)\frac{\alpha^n}{1-\alpha^n};$$

cioè

$$b_n = (-1)^n \alpha^n \frac{(1-h)(1-h\alpha)\dots(1-h\alpha^{n-1})}{(1-\alpha)(1-\alpha^2)\dots(1-\alpha^n)}.$$

Abbiamo dunque

$$u_0(hx) = u_0(x) + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \alpha^n \frac{(1-h)(1-h\alpha)\dots(1-h\alpha^{n-1})}{(1-\alpha)(1-\alpha^2)\dots(1-\alpha^n)} \frac{u_n(x)}{n!}. \tag{15}$$

Per $h = \alpha^m$, con m intero e positivo, troviamo

$$u_0(\alpha^m x) = \frac{1}{(1-\alpha)(1-\alpha^2)\dots(1-\alpha^{m-1})} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \alpha^n \times$$

$$\times (1-\alpha^{n+1})(1-\alpha^{n+2})\dots(1-\alpha^{n+m-1}) \frac{u_n(x)}{n!}.$$

Per $m = 1$ si ritrova lo sviluppo di $u_0(\alpha x)$.

Per $h = \frac{1}{\alpha^m}$ si trova

$$u_0\left(\frac{x}{\alpha^m}\right) = u_0(x) + \sum_{n=1}^{m} \alpha^{\frac{n(n+1)}{2} - nm} \frac{(1-\alpha^m)(1-\alpha^{m-1})\dots(1-\alpha^{m-n+1})}{(1-\alpha)(1-\alpha^2)\dots(1-\alpha^n)} \cdot \frac{u_n(x)}{n!}$$

e da questa, cambiando x in $\alpha^m x$, ricaviamo

$$(16) \quad u_0(x) = u_0(\alpha^m x) + \sum_{n=1}^{m} \alpha^{\frac{n(n+1)}{2} - nm} \times$$
$$\times \frac{(1-\alpha^m)(1-\alpha^{m-1})\dots(1-\alpha^{m-n+1})}{(1-\alpha)(1-\alpha^2)\dots(1-\alpha^n)} \cdot \frac{u_n(\alpha^m x)}{n!}.$$

Per un n fisso, il termine di posto $n+1$ del secondo membro della precedente eguaglianza al tendere di m ad ∞ tende ad $\frac{\alpha^{\frac{n(n+1)}{2}}}{(1-\alpha)\dots(1-\alpha^n)} \cdot \frac{x^n}{n!}$, che è il termine di posto $n+1$ nello sviluppo di $u_0(x)$ in serie di potenze di x.

Dalla (15) otteniamo poi in generale lo sviluppo di $u_k(hx)$:

$$(17) \quad u_k(hx) = h^k k! \left[\frac{u_k(x)}{k!} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \alpha^n \times \right.$$
$$\left. \times \frac{(1-h)(1-h\alpha)\dots(1-h\alpha^{n-1})}{(1-\alpha)(1-\alpha^2)\dots(1-\alpha^n)} \cdot \frac{u_{n+k}(x)}{(n+k)!} \right],$$

e si possono ripetere relativamente alla $u_k(hx)$ le considerazioni fatte per la $u_0(hx)$.

Si ha, per esempio,

$$(18) \quad u_k(x) = \frac{1}{\alpha^{km}} \left[u_k(\alpha^m x) + \int_0^{\alpha^m x} \left\{ \sum_{n=1}^{m} \alpha^{\frac{n(n+1)}{2} - nm} \times \right. \right.$$
$$\left. \left. \times \frac{(1-\alpha^m)\dots(1-\alpha^{m-n+1})}{(1-\alpha)\dots(1-\alpha^n)} \cdot \frac{(\alpha^m x - \xi)^{n-1}}{(n-1)!} \right\} u_k(\xi)\, d\xi \right]$$

che è un altro modo di scrivere l'analoga della (16). Per $m = 1$ si ritrova l'equazione funzionale $u_k(x) = \frac{1}{\alpha^k} \mathrm{S}[u_k(x)]$ a cui soddisfa la u_k. Per m qualunque la (18) si può anche scrivere $u_k(x) = \frac{1}{\alpha^{km}} \mathrm{S}^m [u_k(x)]$, dove con S^m denotiamo la potenza m^{ma} dell'operazione S, ossia l'operazione lineare che risulta dall'applicazione successiva della S per m volte.

La (17) ci dà in particolare

$$u_k(-x) = (-1)^k\, k!\left[\frac{u_k(x)}{k!} + 2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \alpha^n \times \right.$$
$$\left. \times \frac{(1+\alpha)\dots(1+\alpha^{n-1})}{(1-\alpha)\dots(1-\alpha^n)}\cdot\frac{u_{n+k}(x)}{(n+k)!}\right].$$

Dalla (17) poi, facendo $x=1$ ed $h=x$, ricaviamo il seguente sviluppo per la $u_k(x)$:

$$u_k(x) = k!\, x^k\left[\frac{u_k(1)}{k!} + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{\alpha^n}{(1-\alpha)(1-\alpha^2)\dots(1-\alpha^n)} \times \right.$$
$$\left. \times \frac{u_{n+k}(1)}{(n+k)!}(1-x)(1-\alpha x)\dots(1-\alpha^{n-1}x)\right].$$

Matematica. — *Su di una classe di equazioni alle derivate funzionali*. Nota II di FRANCESCO TRICOMI, presentata dal Socio V. VOLTERRA [1].

5. Supponiamo per primo che il nucleo $K(\xi,\eta)$ sia simmetrico e tale che il sistema delle sue funzioni parametriche associate $\psi_1(\xi), \psi_2(\xi), \dots$ possa rendersi ortogonale e normale, il che d'ora innanzi supporremo sempre sia già stato fatto. Inoltre supponiamo che, se i suoi parametri $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ non sono in numero finito, le due serie $\Sigma_h P_h/|\lambda_h|$ e $\Sigma_h P_h^2/|\lambda_h|$, dove P_h è il massimo di $|\psi_h(\xi)|$, siano entrambe convergenti.

In queste ipotesi, com'è noto, la serie $\Sigma_h \psi_h(\xi)\psi_h(\eta)/\lambda_h$ è uniformemente convergente ed ha per somma $K(\xi,\eta)$; pertanto la (7) potrà scriversi

$$\frac{\partial\Phi(\xi,z)}{\partial z} = \alpha(\xi,z) + \sum_h \frac{\psi_h(\xi)}{\lambda_h}\int_0^1 \psi_h(\xi)\,\Phi(\eta,z)\,d\eta$$

da cui, identificando ψ_h con f e giovandosi delle (8), (10) e (11),

$$\frac{\partial\Phi(\xi,z)}{\partial z} = \alpha(\xi,z) + \sum_h \frac{\psi_h(\xi)\,\mu_h(z)}{\lambda_h}, \tag{12}$$

dove si è posto

$$\mu_h(z) = c_h e^{z/\lambda_h} + \int_0^1 \psi_h(\xi)\,\gamma_h(\xi,z)\,d\xi\ ,\quad \gamma_h(\xi,z) = e^{z/\lambda_h}\int_0^z \alpha(\xi,z)\,e^{-z/\lambda_h}\,dz, \tag{13}$$
$$(h=1,2,\dots),$$

essendo le c_h delle costanti arbitrarie.

[1] Presentata nella seduta del 2 maggio 1921.